TOME 11. N° 1. JANVIER 1950.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

ATTRACTION ENTRE DEUX COURANTS PARALLÈLES INDÉFINIS

Par A. LIÉNARD.

Sommaire. — La nouvelle définition officielle de l'ampère a ramené l'attention sur l'évaluation des forces entre courants parallèles. Il est indispensable de savoir déterminer le degré d'approximation des formules et l'auteur y parvient en combinant l'inversion de lord Kelvin et le procédé alterné de Schwartz.

Après avoir obtenu l'expression du champ, l'auteur passe au calcul des efforts en remarquant que le champ, à l'extérieur de chaque conducteur, est le même que celui que produiraient des « doublets » constitués par l'ensemble de deux courants égaux et de sens contraire; ce qui permet d'obtenir l'expression de l'effort sous forme de séries très convergentes. Dans un dernier paragraphe, on montre les modifications très simples à apporter aux formules lorsque les conducteurs sont plongés dans un milieu autre que le vide.

1. La nouvelle définition officielle de l'ampère a ramené l'attention sur le calcul exact des forces exercées entre deux courants parallèles, compte tenu du diamètre des conducteurs et de la perméabilité magnétique des matières qui les constituent. Mais, à ma connaissance, les travaux publiés ne permettent pas d'apprécier le degré d'approximation des formules établies. Aussi ne sera-t-il sans doute pas inutile d'indiquer un procédé de calcul du champ magnétique produit et des forces exercées entre deux courants parallèles au moyen de séries admettant comme majorantes des séries géométriques très convergentes qui se prêtent à une évaluation d'un maximum de l'erreur subsistant lorsque l'on s'arrête à tel ou tel terme.

On obtient simplement ce résultat en combinant la méthode d'inversion de lord Kelvin et la méthode alternée de Schwartz.

2. Soient O′ et O″ les traces sur un plan normal à leur direction des axes des deux conducteurs C′, C″, de rayons a' et a''. J'appelle I' et I'' les courants qui y circulent; μ' et μ'' les perméabilités de chacun d'eux.

J'utiliserai des coordonnées polaires r', θ'; r'', θ''; ayant respectivement pour origines les points O′ et O″. Enfin je désignerai le champ produit en un point M par une des lettres H, H' ou H'' suivant que le point M considéré est extérieur aux deux conducteurs ou intérieur à C′ ou à C″.

Étudions d'abord, le champ qui serait produit par le seul courant I' (que l'on peut supposer fermé à l'infini). Le champ qui est dû à I'' se déduira du premier par symétrie et il n'y aura qu'à ajouter les résultats pour avoir le champ total.

Si le conducteur C″ avait une perméabilité μ'' égale à 1 comme l'est celle du vide où les conducteurs seront d'abord supposés placés, le champ du courant I' aurait pour expressions

$$\vec{H'} = 2I'\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \operatorname{grad}\theta', \qquad \left.\begin{matrix}\vec{H}\\ \vec{H''}\end{matrix}\right\} = 2I'\operatorname{grad}\theta'. \qquad (1)$$

Les conditions de continuité du champ à la surface du conducteur C′, savoir

$$\vec{H'_T} = \vec{H_T}, \qquad (2)$$
$$\mu' H'_N = H_N \qquad (3)$$

sont satisfaites, H'_N et H_N étant nuls.

A la surface du conducteur C″, les conditions de continuité

$$\vec{H_T} = \vec{H''_T}, \qquad (4)$$
$$H_N = \mu'' H''_N \qquad (5)$$

sont aussi satisfaites, mais pour une raison différente, à savoir que nous supposons pour le moment $\mu'' = 1$.

Tenons compte maintenant de la valeur réelle de μ''. Pour $\mu'' \neq 1$, la condition (4) reste satisfaite, mais (5) ne l'est plus. Pour rétablir la continuité de l'induction normale à la surface de C″, je ferai subir

à H, H' et H'' des corrections $\Delta_1 H$, $\Delta_1 H'$, $\Delta_1 H''$.

Je prends :

1° $$\Delta_1 H'' = -\sigma'' H'',$$

σ'' étant une constante dont la valeur sera déterminée tout à l'heure;

2° $$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 H \\ \Delta_1 H'\end{array}\right\} = \sigma'' \operatorname{grad} \chi_1,$$

χ_1 étant le potentiel déduit de $-\theta'$ par inversion en passant de l'intérieur de C″ à la région extérieure de C″, intérieur de C′ compris (les lignes équipotentielles de χ_1 sont des arcs de circonférence). Comme la fonction θ' est uniforme à l'intérieur de C″, χ_1 sera aussi uniforme dans toute la région extérieure et, d'après les propriétés de l'inversion, on aura sur la surface de C″

$$\chi_1 = -\theta', \qquad \frac{d\chi_1}{dr''} = +\frac{d\theta'}{dr''}.$$

Grâce à la manière dont la fonction χ_1 a été choisie, $\Delta_1 H$ et $\Delta_1 H''$ auront des composantes tangentielles égales entre elles sur la surface de C″, de sorte que la condition (4) reste satisfaite en y remplaçant H et H'' respectivement par $H + \Delta_1 H$, $H'' + \Delta_1 H''$. Quant à la condition (5) elle devient

$$\frac{d\theta'}{dr''} + \sigma'' \frac{d\chi_1}{dr''} = \mu''\left[\frac{d\theta'}{dr''} - \sigma'' \frac{d\theta'}{dr''}\right]$$

ou, toutes réductions faites

$$1 + \sigma'' = \mu''(1 - \sigma''),$$

ou encore

$$\sigma'' = \frac{\mu'' - 1}{\mu'' + 1}. \tag{6}$$

Telle est la valeur à donner à la constante σ'' pour satisfaire aux conditions de continuité à la surface de C″.

Mais, si les conditions (4) et (5) sont maintenant satisfaites, ce sont celles à la surface de C′ qui ne le sont plus, ou du moins l'une des deux, la condition (3). Cela oblige à apporter une seconde correction en effectuant une inversion de $-\chi_1$ de l'intérieur de C′ sur toute la région extérieure à C′ comme nous avions effectué tout à l'heure l'inversion de $-\theta'$. Si χ_2 est la fonction harmonique provenant de l'inversion de $-\chi_1$, les nouvelles corrections auront pour expressions

$$\Delta_2 H' = -\sigma' \operatorname{grad}(\sigma'' \chi_1) = -\operatorname{grad}(\sigma' \sigma'' \chi_1),$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_2 H \\ \Delta_2 H''\end{array}\right\} = \sigma' \sigma'' \operatorname{grad} \chi_2 = \operatorname{grad}(\sigma' \sigma'' \chi_2);$$

σ' est défini à partir de μ' comme σ'' l'était en fonction de μ'' par la relation (6).

Mais cette seconde correction fait que, de nouveau, la condition (5) n'est plus satisfaite à la surface de C″. Il faut donc une troisième correction de même forme que la première et ainsi de suite indéfiniment, les corrections tendant vers zéro comme nous nous en rendrons compte plus loin, de sorte que l'on obtient finalement pour représenter le champ aux divers points de l'espace des séries très convergentes.

3. Voici le résultat auquel on arrive finalement. En ce qui concerne d'abord l'espace extérieur aux deux conducteurs, on a

$$H = 2I' \operatorname{grad} \chi_0 + 2I' \operatorname{grad}[\sigma'' \chi_1 + \sigma' \sigma'' \chi_2 + \sigma' \sigma''^2 \chi_3 + \ldots]$$
$$+ 2I'' \operatorname{grad} \psi_0 + 2I'' \operatorname{grad}[\sigma' \psi_1 + \sigma' \sigma'' \psi_2 + \sigma'^2 \sigma'' \psi_3 + \ldots].$$

χ_0 et ψ_0 sont simplement égaux à θ' et θ'', à une constante additive près sans importance. Les fonctions χ_1, χ_2, ... se déduisent de χ_0 comme suit. Les fonctions χ_1, χ_3, ..., χ_{2n+1} se déduisent de $-\chi_0$, $-\chi_2$, ..., $-\chi_{2n}$ par inversion par rapport à la circonférence C″. Quant à χ_2, χ_4, ..., χ_{2n} ils se déduisent de $-\chi_1$, $-\chi_3$, ..., $-\chi_{2n-1}$, également par inversion, mais cette fois-ci par rapport à la circonférence C′. On a donc à effectuer alternativement des inversions par rapport à C″ et par rapport à C′ d'où le nom de « procédé alterné ». Quant aux ψ_n, leur loi de formation à partir de ψ_0 est la même que pour les χ_n, sauf que l'on commence les inversions par rapport à C′ au lieu de les commencer par C″.

Sans donner les expressions détaillées de H' et de H'', nous nous bornerons à indiquer comment leurs valeurs s'obtiennent à partir de l'expression de H.

Pour obtenir H', il faut :

1° remplacer le premier terme $2I' \operatorname{grad} \chi_0$ par $2I'\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \operatorname{grad} \chi_0$;

2° pour les autres termes de la première ligne remplacer tout facteur χ_{2n} d'indice pair par $(-\chi_{2n-1})$;

3° à la seconde ligne, remplacer tout facteur ψ_{2n+1} d'indice impair par le facteur $(-\psi_{2n})$.

Les règles sont les mêmes, *mutatis mutendis*, pour H''.

4. Un terme de l'expression de H de la forme

$$2I' \operatorname{grad}\left(\sigma'^{\frac{n}{2}} \sigma''^{\frac{n}{2}} \chi_n\right) \quad \text{ou} \quad 2I' \operatorname{grad}\left(\sigma'^{\frac{n-1}{2}} \sigma''^{\frac{n+1}{2}} \chi_n\right),$$

suivant que n est pair ou impair, représente le champ d'un système de deux courants rectilignes indéfinis parallèles à I' et d'intensité

$$\pm I' \sigma'^{\frac{n}{2}} \sigma''^{\frac{n}{2}} \quad \left(\text{ou } \pm I' \sigma'^{\frac{n-1}{2}} \sigma''^{\frac{n+1}{2}}\right).$$

Je donnerai le nom de doublet à un tel système de deux courants. Chaque doublet est équivalent à un feuillet magnétique plan limité aux lignes de courant du doublet. Les points limites des doublets dans un plan normal aux courants sont alignés le long de O′O″. Partant de O′ où passe le courant I' qui donne naissance au champ $2I' \operatorname{grad} \chi_0$, les points limites pour le doublet d'intensité $\pm I' \sigma''$ sont le point B_1, inverse du point O′ par rapport à la circonférence C″, et le point O″ inverse du point à l'infini par où le courant I' est supposé revenir. En raison

de ce rôle, nous désignerons encore par la lettre B_0 le point O'' et pour une raison analogue nous représenterons encore par la lettre A_0 le point O'.

Prenant maintenant les inverses de B_1 et B_0 par rapport à la circonférence C', nous obtenons les points A_2 (inverse de B_1) et A_1 (inverse de B_0) par où passent les courants $\pm I'\sigma'\sigma''$. Nous continuerons en prenant les inverses B_3 et B_2 de A_2 et A_1 par rapport à la circonférence C'' et ainsi de suite. Les positions des divers doublets dérivés de I' sont les suivantes :

Courant I'.	A_0.
Doublet $\pm I'\sigma''$.........	B_1 et B_0
Doublet $\pm I'\sigma'\sigma''$.......	A_2 et A_1
Doublet $\pm I'\sigma'\sigma''^2$.......	B_3 et B_2
....	....

De même les doublets dérivés de I'' auront comme position :

Courant I''.	B_0.
Doublet $\pm I''\sigma'$.........	A_1 et A_0
Doublet $\pm I''\sigma'\sigma''$.......	B_2 et B_1
....	....

On voit que les feuillets équivalents aux doublets provenant de I'' occupent les espaces laissés libres par les feuillets provenant de I' et réciproquement.

Considérons la circonférence orthogonale aux circonférences C' et C''; elle a un diamètre AB situé sur $O'O''$. Tous les points A_n, B_n sont extérieurs à la circonférence C, les A_n étant situés entre A_0 et A et les points B_n à droite de B.

Soit d la distance $O'O''$ des axes des deux conducteurs donnés. Je poserai

$$x_n = \frac{A_0A_n}{d}, \qquad y_p = \frac{B_0B_p}{d}$$

(y_n compté positif de droite à gauche);

x_n et y_p sont des fonctions croissantes des indices n et p, tendant respectivement vers $\frac{A_0A}{d}$ et $\frac{B_0B}{d}$ qaund n et p croissent indéfiniment.

Si l'on pose, pour simplifier

$$\frac{a'}{d} = \varepsilon', \qquad \frac{a''}{d} = \varepsilon'' \qquad (\varepsilon' + \varepsilon'' < 1),$$

on aura

$$\frac{AB}{d} = \delta = \sqrt{1 - 2(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + (\varepsilon'^2 - \varepsilon''^2)^2} < 1 - \varepsilon'^2 - \varepsilon''^2 \tag{7}$$

et

$$x_n + y_p < 1 - \delta \qquad \text{ou} \qquad 1 - x_n - y_p > \delta$$

et, en particulier pour y_p égal à $y_1 = \varepsilon''^2$

$$1 - x_n - \varepsilon''^2 > \delta.$$

δ est d'autant plus voisin de l'unité que a' et a'' sont plus petits. Par exemple, pour $\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{100}$ (conducteurs de 1 cm de diamètre situés à 50 cm de distance), on a

$$\delta = \sqrt{1 - 4.10^{-4}} \simeq 1 - 2.10^{-4} = 0{,}9998.$$

Dans un tel cas, tous les x_n et y_p resteront compris entre 0 et 0,0001 (soit $A_0A = B_0B = 1/20^e$ de millimètre).

Puisque les x_n et y_p croissent très lentement, les différences $x_n - x_{n-1}$ et $y_p - y_{p-1}$ tendent très rapidement vers zéro. Il est facile de le vérifier. D'après les règles de l'inversion, on a

$$x_n = \frac{\varepsilon'^2}{1 - y_{n-1}}, \qquad y_p = \frac{\varepsilon''^2}{1 - x_{p-1}},$$

d'où (en faisant p égal à $n - 1$)

$$x_n = \frac{\varepsilon'^2(1 - x_{n-2})}{1 - \varepsilon''^2 - x_{n-2}}$$

et de même

$$x_{n-1} = \frac{\varepsilon'^2(1 - x_{n-3})}{1 - \varepsilon''^2 - x_{n-2}}.$$

La dernière formule suppose n au moins égal à 3. En retranchant membre à membre et réduisant, il vient

$$x_n - x_{n-1} = (x_{n-2} - x_{n-3}) \frac{\varepsilon'^2 \varepsilon''^2}{(1 - \varepsilon''^2 - x_{n-2})(1 - \varepsilon''^2 - x_{n-3})}.$$

Chaque facteur du dénominateur est compris, d'après ce qui précède entre 1 et $\delta < 1$.

Ainsi, les largeurs des doublets décroissent en moyenne plus rapidement que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{\varepsilon'\varepsilon''}{\delta}$. Nous utiliserons ce résultat plus loin.

Pour les premières valeurs de n, on a

$$x_0 = 0;$$
$$x_1 = \varepsilon'^2, \qquad x_1 - x_0 = \varepsilon'^2;$$
$$x_2 = \frac{\varepsilon'^2}{1 - \varepsilon''^2}, \qquad x_2 - x_1 = \frac{\varepsilon'^2\varepsilon''^2}{1 - \varepsilon''^2}$$

et, d'une façon générale,

$$\frac{\varepsilon'^n \varepsilon''^n \ (\text{ou } \varepsilon'^{n+1}\varepsilon''^{n-1})}{1} < x_n - x_{n-1} < \frac{\varepsilon'^n \varepsilon''^n \ (\text{ou } \varepsilon'^{n+1}\varepsilon''^{n-1})}{\delta^{n-1}}. \tag{8}$$

L'une ou l'autre des deux expressions du numérateur doit être employée suivant que n est pair ou impair.

L'exposant de δ en dénominateur est $n - 1$ et non pas n parce que les dénominateurs n'apparaissent qu'à partir de $x_2 - x_1$.

On aurait des relations analogues, *mutatis mutandis*, pour les y_p.

5. Nous avons vu que les courants I', I'' passant en O' et O'' et les doublets qui en dérivent se répartissent en deux groupes suivant qu'ils sont situés entre A_0 et A ou entre B et B_0. Nous désignerons ces deux ensembles par les lettres E' et E''. Les courants de l'ensemble E' sont tous situés à l'intérieur du conducteur C' et de même ceux de l'ensemble E'' à l'intérieur de C''.

On peut remarquer qu'aucun doublet appartenant à l'ensemble E' ne figure dans l'expression du

champ H' intérieur du conducteur C′. Grâce à cela, le champ H' est bien fini et déterminé en tous les points du conducteur C′ comme cela doit être *a priori*.

De même aucun doublet appartenant à l'ensemble E″ ne figure dans l'expression du champ H'' intérieur à C″.

Ces explications préliminaires étant faites, il est facile de s'assurer que les formules donnant H, H' et H'' satisfont aux équations bien connues du champ électromagnétique. Ces équations sont d'abord

$$\operatorname{rot} H = 0, \qquad \operatorname{div} H = 0$$

dans chacune des trois régions où la perméabilité garde une valeur constante (μ', μ'' ou 1, suivant la région), car on peut appliquer aux séries représentant H, H' et H'' un théorème d'Harnack suivant lequel les séries dont les termes sont des fonctions harmoniques représentent elles-mêmes des fonctions harmoniques.

Il y a ensuite les conditions (2), (3), (4) et (5) à la surface des conducteurs C′ et C″. Nous avons déjà suffisamment parlé de ces conditions pour qu'il soit nécessaire d'insister.

Forces exercées.

6. Nous pouvons aborder maintenant le calcul de l'effort d'attraction entre courants, compte tenu de l'aimantation prise par les conducteurs magnétiques.

Cet effort est identique à celui qu'exercent l'un sur l'autre les ensembles E′ et E″ définis plus haut.

On peut établir ce résultat sans aucun calcul, par application de la théorie des pressions de Maxwell, comme l'a fait remarquer M. Darrieus ou encore en ayant simplement recours au principe de l'égalité de l'action et de la réaction. J'emploierai ici ce second procédé. J'aurai, plus loin (§ 10), l'occasion de faire une application de l'autre procédé.

Supposons que nous substituions effectivement au conducteur C′ l'ensemble des courants E′ tout en conservant pour le moment le courant I'' réparti dans C″ ainsi que l'aimantation induite dans ce conducteur. L'ensemble E′ produira, tant à l'extérieur des deux conducteurs qu'à l'intérieur de C″, exactement les mêmes champs que produiraient le courant I' et l'aimantation prise par C′. Par suite, l'équilibre magnétique subsistera dans C″ sans que l'aimantation de ce conducteur tende à se modifier.

Du moment que l'état de C″ reste inchangé à tous égards, ce conducteur subit les mêmes forces qu'avant la substitution de l'ensemble E′ au conducteur C′. Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction exige, par suite, que l'effort total supporté par C′ dans l'état primitif soit égal en grandeur, direction et ligne d'action à la résultante des efforts supportés par les courants E′ après la substitution.

Il n'y a plus qu'à substituer à son tour l'ensemble E″ au courant et à l'aimantation du conducteur C″ et à répéter les mêmes raisonnements pour justifier le résultat annoncé (¹).

7. Calculons donc les forces s'exerçant entre deux doublets, l'un de rang n de l'ensemble E′ et l'autre de rang p de l'ensemble E″. Pour simplifier l'écriture, nous ferons le calcul comme si le courant valait un dans chaque doublet. Il sera facile par la suite de tenir compte de la valeur des courants. L'effort a pour expression

$$F = \frac{2}{d}\left[\frac{1}{1-x_n-y_p} + \frac{1}{1-x_{n-1}-y_{p-1}} - \frac{1}{1-x_n-y_{p-1}} - \frac{1}{1-x_{n-1}-y_p}\right] \qquad (n, p \geqq 1).$$

La somme des deux premiers dénominateurs a même valeur K que celle des deux autres. Cela permet d'écrire

$$F = \frac{2K}{d}\left[\frac{1}{(1-x_n-y_p)(1-x_{n-1}-y_{p-1})} - \frac{1}{(1-x_n-y_{p-1})(1-x_{n-1}-y_p)}\right] = \frac{2K}{d}\,\frac{(x_n-x_{n-1})(y_p-y_{p-1})}{\text{produit des 4 dénominateurs}}$$

ou encore

$$F = \frac{2}{d}(x_n-x_{n-1})(y_p-y_{p-1}) \times \left[\frac{1}{1-x_n-y_p} + \frac{1}{1-x_{n-1}-y_{p-1}}\right] \times \frac{1}{1-x_n-y_{p-1}}\,\frac{1}{1-x_{n-1}-y_p} \qquad (9)$$

Transformons successivement les divers facteurs de l'expression (9). Il résulte d'abord de la double inégalité (8) que l'on peut écrire

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\varepsilon'^{n}\varepsilon''^{n} \text{ ou } \varepsilon'^{n+1}\varepsilon''^{n-1}}{[\text{nombres compris entre 1 et } \delta]^{n-1}}.$$

$y_p - y_{p-1}$ est susceptible d'une expression analogue. Le crochet qui suit $(y_p - y_{p-1})$ a ses deux termes compris entre 1 et $\frac{1}{\delta}$ et de même les deux dernières fractions qui suivent le crochet ont chacune leur valeur comprise entre 1 et $\frac{1}{\delta}$. Finalement, nous pouvons écrire

$$F = \frac{2}{d}\,\frac{2[\varepsilon'^{n}\varepsilon''^{n} \text{ ou } \varepsilon'^{n+1}\varepsilon''^{n-1}][\varepsilon'^{p}\varepsilon''^{p} \text{ ou } \varepsilon'^{p-1}\varepsilon''^{p+1}]}{[\text{nombres compris entre 1 et } \delta]^{n+p+1}} \qquad (n, p \geqq 1).$$

8. Soit m la somme $n + p$. Tenons compte de ce que les doublets peuvent dériver tous deux du cou-

(¹) On peut remarquer que, après la double substitution de E′ puis de E″, ce n'est plus que dans la région extérieure aux deux conducteurs que subsiste l'identité des champs magnétiques avant et après la substitution.

rant I' (n pair, p impair, d'où m impair) ou tous deux du courant I'' (n impair, p pair, d'où m impair) ou encore l'un du courant I' et l'autre du courant I'' (n et p de même parité et, par suite, m pair); nous obtenons en rétablissant la valeur du courant dans les doublets

$$F = \frac{2}{d} \frac{2}{[\text{nombre compris entre 1 et } \delta]^{m+1}} \times \left\{ \begin{array}{l} I'^2 \sigma'^{\frac{m-1}{2}} \sigma''^{\frac{m+1}{2}} \varepsilon'^{m-1} \varepsilon''^{m+1} \\ \text{ou} \\ + I' I'' (\sigma' \sigma'')^{\frac{m}{2}} (\varepsilon' \varepsilon'')^m \\ \text{ou} \\ + I''^2 \sigma'^{\frac{m+1}{2}} \sigma''^{\frac{m+1}{2}} \varepsilon'^{m+1} \varepsilon''^{m-1}. \end{array} \right. \tag{10}$$

On remarquera que les exposants de ε' et ε'' sont dans tous les cas doubles de ceux de σ' et de σ''.

La formule (10) concerne l'action de deux doublets. Mais il existe plusieurs combinaisons de n et p pour lesquelles m reprend la même valeur et pour lesquelles F conserve la même expression, avec variation possible toutefois de la valeur à attribuer au nombre compris entre 1 et δ.

Soit d'abord m pair et non nul. On aura, pour les n et p possibles, un nombre de combinaisons égal à $m+1$, savoir les combinaisons

$$\left. \begin{array}{l} n = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ m-1, \ m; \\ p = m, \ m-1, \ \ldots, \ 1, \ 0. \end{array} \right\} \tag{11}$$

Pour chacun des $m-1$ cas intermédiaires, n et p sont l'un et l'autre au moins égaux à 1 et la formule (10) est applicable. Pour les deux cas extrêmes, un des doublets se réduit au seul courant I' ou I'' et l'expression initiale de F ne comprend plus que deux termes au lieu de quatre : le résultat final garde la même forme (10), sauf suppression d'un facteur 2. Au total on aura $(m-1)$ combinaisons pour n et p donnant chacune un terme égal à celui qu'indique la formule (10) et deux combinaisons ne donnant que la moitié, soit au total

$$(m-1) + 2 \times \frac{1}{2} = m.$$

Pour $m = 0$, d'où $n = p = 0$, on a simplement affaire à l'attraction de deux courants I' et I'' passant en O' et O'', d'où la force

$$F = \frac{2}{d} I' I''.$$

Considérons maintenant les valeurs impaires de m. Dans ce cas, ce n'est qu'en faisant varier n et p de 2 en 2 que l'on retombe sur le même facteur I'^2 ou I''^2. Les $(m-1)$ cas intermédiaires du tableau (11) fourniront $\frac{m-1}{2}$ termes en I'^2 et $\frac{m-1}{2}$ termes en I''^2. Les cas extrêmes fourniront, l'un un terme en I'^2, l'autre en I''^2, affectés l'un et l'autre d'un facteur $\frac{1}{2}$, ce qui fournira $\frac{m-1}{2} + \frac{1}{2}$ ou $\frac{m}{2}$ termes tant pour I'^2 que pour I''^2.

Réunissant les résultats obtenus pour toutes les valeurs de m de zéro à l'infini, nous obtenons finalement l'expression suivante de l'effort d'attraction

$$\begin{aligned} F = \frac{2 I' I''}{d} + \frac{4 I' I''}{d} \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{m (\sigma' \sigma'')^{\frac{m}{2}} (\varepsilon' \varepsilon'')^m}{\text{nombre compris entre 1 et } \delta^{m+1}} & \quad (m \text{ pair}) \\ + \frac{2 I'^2}{d} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m \sigma'^{\frac{m-1}{2}} \sigma''^{\frac{m+1}{2}} \varepsilon'^{m-1} \varepsilon''^{m+1}}{\text{nombre compris entre 1 et } \delta^{m+1}} & \quad (m \text{ impair}) \\ + \frac{2 I''^2}{d} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m \sigma'^{\frac{m+1}{2}} \sigma''^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon'^{m+1} \varepsilon''^{m-1}}{\text{nombre compris entre 1 et } \delta^{m+1}} & \quad (m \text{ impair}). \end{aligned} \tag{12}$$

Les séries donnant F sont d'autant plus convergentes que le produit $\sigma' \sigma'' \varepsilon'^2 \varepsilon''^2$ est plus voisin de zéro. Pour $\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{100}$, et des conducteurs en cuivre pour lequel le produit de la susceptibilité par 4π, c'est-à-dire $\mu - 1$, vaut $-11 . 10^{-6}$, σ' et σ'' sont égaux à $\frac{-11 . 10^{-6}}{2 - 11 . 10^{-6}} \cong -5,5 . 10^{-6}$. Le produit $\sigma \varepsilon^2$ vaut alors $-5,5 . 10^{-10}$, ce qui est absolument négligeable.

Pour des conducteurs qui ne seraient ni magnétiques ni diamagnétiques, σ' et σ'' seraient nuls et la valeur de F se réduirait à $\frac{2 I' I''}{d}$ quel que soit le diamètre des conducteurs. *Ce diamètre n'a d'influence que si les conducteurs sont magnétiques.*

9. Voici l'expression exacte des quatre termes de F correspondant aux valeurs 0, 1, 2 et 3 de m :

$$\begin{aligned} & \frac{2 I' I''}{d} \left\{ 1 + \sigma' \sigma'' \varepsilon'^2 \varepsilon''^2 \frac{4 - 2\varepsilon'^2 - 2\varepsilon''^2}{(1 - \varepsilon'^2 - \varepsilon''^2)(1 - \varepsilon'^2)(1 - \varepsilon''^2)} \right\} \\ & + \frac{2 I'^2}{d} \left\{ \sigma'' \varepsilon''^2 \frac{1}{1 - \varepsilon''^2} + \sigma' \sigma''^2 \varepsilon'^2 \varepsilon''^4 \frac{3 - \varepsilon'^2 - \varepsilon''^2}{(1 - \varepsilon'^2 - 2\varepsilon''^2 + \varepsilon''^4)(1 - \varepsilon'^2 - \varepsilon''^2)(1 - \varepsilon'^2)} \right\} \\ & + \frac{2 I''^2}{d} \left\{ \sigma' \varepsilon'^2 \frac{1}{1 - \varepsilon'^2} + \sigma'^2 \sigma'' \varepsilon'^4 \varepsilon''^2 \frac{3 - \varepsilon'^2 - \varepsilon''^2}{(1 - 2\varepsilon'^2 - \varepsilon''^2 + \varepsilon'^4)(1 - \varepsilon'^2 - \varepsilon''^2)(1 - \varepsilon''^2)} \right\}. \end{aligned} \tag{12'}$$

Il est intéressant de remarquer que, pour $m = 1, 2$ ou 3, les facteurs de correction représentés, à un facteur m ou $2m$ près, par les diverses fractions de (12′) ne sont pas seulement comprises entre 1 et $\frac{1}{\delta^{m+1}}$ mais le sont entre 1 et $\frac{1}{(1-\varepsilon'^2-\varepsilon''^2)^m}$. L'intervalle est diminué par la réduction de l'exposant et par le fait que $1-\varepsilon'^2-\varepsilon''$ l'emporte sur δ en vertu de (7).

La proposition énoncée se vérifie immédiatement pour $m = 1$ ou 2. Pour $m = 3$, il faut s'appuyer encore sur (7).

10. Examinons en finissant comment se modifient les formules lorsque l'on suppose que les conducteurs ne sont pas dans le vide, mais dans un milieu magnétique isotrope et homogène de perméabilité μ_m.

En ce qui concerne les champs H, H' et H'', les formules restent valables à la seule condition de définir les quantités σ non plus par $\sigma = \frac{\mu-1}{\mu+1}$ [équat. (6)], mais par

$$\sigma = \frac{\mu-\mu_m}{\mu+\mu_m} \qquad (\mu = \mu' \text{ ou } \mu'';\ \sigma = \sigma' \text{ ou } \sigma''). \quad (6^{bis})$$

On vérifie facilement que, grâce à cette seule modification, toutes les équations satisfont aux conditions de Maxwell.

En ce qui concerne la force développée, le principe de l'action et de la réaction ne donne plus rien, car le milieu s'aimante et subit des efforts qui se transmettent aux conducteurs. Il faut alors recourir à la première méthode indiquée au paragraphe 6 qui conduit pour l'évaluation de l'effort tendant à rapprocher les conducteurs aux règles suivantes :

1° Effectuer d'abord les calculs de F comme plus haut en donnant seulement à σ' et σ'' les nouvelles valeurs (6 *bis*).

2° Multiplier ensuite l'effort calculé par la perméabilité μ_m du milieu.

Ces règles découlent de la formule

$$F = \frac{\mu_m}{4\pi}\int_S \left\{ H(HN_e) - \frac{1}{2}N_e H^2 \right\} dS. \qquad (13)$$

Dans cette formule, S est une surface cylindrique entourant l'un des conducteurs et N_e est un vecteur unité normal à l'élément dS et dirigé vers l'extérieur.

La formule (13) est une conséquence de la proposition suivante établie dans une étude antérieure (²) : lorsqu'un système électromagnétique est plongé dans un milieu magnétique incompressible, homogène et isotrope, le travail produit dans un déplacement virtuel compatible avec la solidité du système et l'incompressibilité du milieu est le même que celui de tensions superficielles de grandeur

$$Q = H_T(BN_e) + \frac{1}{2}N_e\left\{ (B_N H_N) - (B_T H_T) \right\}, \quad (14)$$

appliquées à une surface S tracée dans le milieu et enveloppant le système [*loc. cit.*, § 24, p. 300, équat. (4)].

L'identité des deux résultats se vérifie facilement en remarquant que

$$\begin{aligned} \mu_m H(HN_e) - \frac{1}{2}N_e\mu_m H^2 &\equiv H(BN_e) - \frac{1}{2}N_e(BH) \\ &\equiv H_T(BN_e) + H_{N_e}(BN_e) \\ &\quad - \frac{1}{2}N_e\left\{ (B_N H_N) + (B_T H_T) \right\} \equiv Q. \end{aligned}$$

L'absence du dénominateur 4π dans (14) tient à ce que j'ai utilisé dans l'étude de 1923 le système d'unités d'Heaviside (³).

(²) A. Liénard, Équilibre et déformation de systèmes de conducteurs, etc. *Ann. Phys. Chim.*, 9e série, 1923, **20**.

(³) Je répare une erreur qui s'est glissée au début du paragraphe 24 (p. 297, lignes 5 et 6). La proposition énoncée d'après laquelle les déplacements virtuels envisagés laissent invariables les intégrales $\int F(J)\,d\tau$ n'est exacte que pour les conventions 2, 3 et 4 pour lesquelles la constante C (*cf.* p. 270) est nulle. Avec les conventions 1 et 5, il faut tenir compte des termes dF. Les calculs deviennent plus compliqués, mais le résultat final reste absolument le même.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1949.

SÉPARATION DES RADIATIONS DANS LE PROCHE INFRAROUGE AU MOYEN DE PRISMES
I. DISPERSION DE QUELQUES VERRES D'OPTIQUE

Par JEAN LECOMTE
[avec la collaboration technique de Mlles O. TALBOT et A. DELAY (1)].
Laboratoire de Recherches physiques à la Sorbonne.

Sommaire. — Détermination des indices de réfraction de six verres d'optique entre le visible et 2,4 μ environ. Représentation des résultats par diverses formules de dispersion.

Dans la première Partie de ce travail, ont été mesurés, entre l'extrémité du spectre visible et 2,4 μ environ, les indices de réfraction de six prismes, taillés dans des verres d'optique. En y joignant les indices de réfraction, fournis par ailleurs pour plusieurs raies du spectre visible, on peut tracer la courbe de dispersion depuis 0,4 μ environ. Ces résultats ont servi à calculer des formules de dispersion.

La deuxième Partie sera destinée à guider le chercheur pour le choix d'une substance donnant une dispersion convenable dans le proche infrarouge, jusqu'à 3 μ au maximum. Nous avons utilisé les mesures personnelles sur les six verres précités et nous y avons joint des données empruntées à différents auteurs et relatives à d'autres substances.

1. Recherches antérieures sur la dispersion des verres par la méthode du prisme. — Elles se présentent comme relativement peu nombreuses. Dès les premières utilisations de l'infrarouge vers la fin du siècle dernier, on a constaté que, pour les verres d'optique, pratiquement la transmission restait du même ordre que dans le spectre visible, tant que l'on ne dépassait pas des longueurs d'onde voisines de 2 μ (2). A partir de ce point, on observe une absorption croissante avec la longueur d'onde, qui rend pratiquement impossible le recours à des prismes en verre au-dessus de 2,5 μ en moyenne.

Dans les anciennes recherches, nous citerons celles de Rubens [1] sur neuf verres d'optique jusque vers 2,5 μ au maximum, celle du même auteur sur un flint jusqu'à 4,1 μ [2], celles d'Abbot et Fowle [3] sur neuf autres verres d'optique. Ces derniers auteurs ont montré la possibilité d'obtenir un prisme possédant une dispersion sensiblement constante, depuis le visible jusque vers 2 μ, en accolant tête-bêche deux prismes convenablement choisis comme substance et comme angle réfringent. Plus récemment, nous trouvons un travail de Dreisch et Lueg [4], concernant l'influence de la teneur en acide borique sur la dispersion des verres jusque vers 2,5 μ environ. Par la méthode photographique, Mme M. Marquet [5] a mesuré les indices de réfraction de 45 verres en vue de permettre le calcul de combinaisons optiques utilisables dans le proche infrarouge. Lorsqu'il s'agit de borosilicates et de crowns, les valeurs des indices de réfraction, calculées par extrapolation, diffèrent sensiblement de celles que l'on observe, alors que, pour les flints denses, elles apparaissent presque identiques. Dans la même région, c'est-à-dire jusqu'à 11 400 Å, Brauckhoff [6], également par une méthode photographique, a donné les indices de dix verres. Il a calculé l'exposant de la formule de dispersion de Hartmann, correspondant à chaque verre étudié, ainsi qu'une formule d'interpolation. Ces mesures, ainsi que celles de Kingslake et Conrady [7] se prêtent fort bien aux calculs de Herzberger [8] au moyen d'une nouvelle formule de dispersion, faisant intervenir des dispersions partielles, qui s'écrit

$$\mu_\lambda - \mu_D = B(\lambda)\mu_D + A(\lambda)(\mu_F - \mu_C),$$

avec μ représentant $n - 1$, λ la longueur d'onde considérée, les indices D, F et C se rapportant aux radiations bien connues du spectre visible. Il est très important de noter que A et B représentent des fonctions assez simples de la longueur d'onde, qui possèdent les *mêmes coefffcients* pour tous les verres (sauf pour certains verres spéciaux, pour lesquels il faut ajouter deux termes correctifs à la formule précédente). De cette manière, on calcule, avec une bonne approximation, les indices de réfraction jusqu'à la limite des mesures, soit 2,6 μ. Enfin, Mme J. Ramadier [9], du visible à 2,5 μ environ, a examiné la dispersion de quatre verres d'optique pour voir si

(1) Actuellement Mmes Blet-Talbot et Depaigne.

(2) Nous supposons, bien entendu, qu'il s'agit de verres non colorés, dont la teneur en fer n'est pas suffisante pour faire apparaître des bandes gênantes, caractéristiques de la présence de ce métal.

l'on pouvait extrapoler dans l'infrarouge les formules de dispersion établies d'après les données du spectre visible.

2. **Technique expérimentale et résultats.** — Nous avons employé un spectrographe à miroirs du type de Wadsworth, avec, comme récepteur, un thermorelais (utilisé comme pile thermoélectrique) et un galvanomètre Zernicke du type Z_C. Le prisme étant réglé au minimum de déviation pour une radiation visible, on sait que, pour les différentes positions de la plate-forme, qui porte le prisme et un miroir plan, seules atteignent le récepteur les radiations ayant traversé le prisme au minimum de déviation. On repère donc, par la méthode de Poggendorf, les positions de la plate-forme correspondant à des longueurs d'onde connues (bandes d'absorption de liquides par exemple). Il suffit alors d'appliquer les formules classiques du prisme, pour calculer les indices de réfraction.

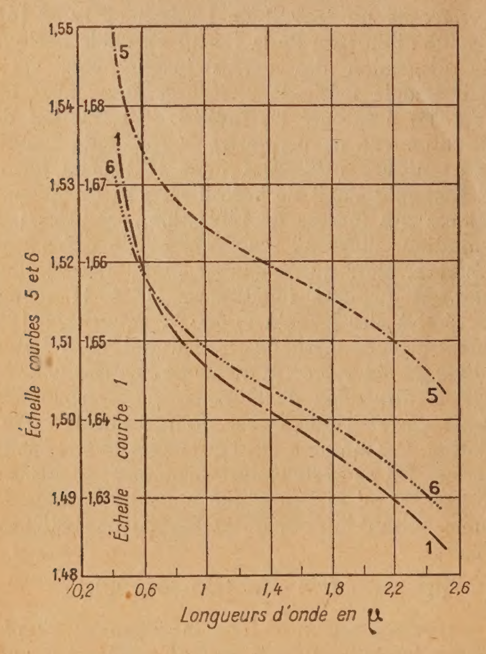


Fig. 1.

Une des causes d'erreur les plus importantes vient de la connaissance plus ou moins précise des longueurs d'onde admises pour l'étalonnage : suivant la largeur des fentes utilisées, se modifie le contour des bandes généralement formées de plusieurs composantes (non résolues avec les prismes de verre). Par contre, un petit défaut de réglage du prisme, relativement au minimum de déviation, n'exerce pas une influence sensible sur la dispersion. On sait que, dans ces conditions, l'ensemble du spectre se déplace sans modifier son étalement, ce qui n'a pas de conséquence fâcheuse, puisque l'étalonnage consiste à repérer les positions d'un certain nombre de longueurs d'onde infrarouges connues.

Une discussion des erreurs faite dans les Diplômes d'Études Supérieures de Mme Ramadier [9] et de Mlle Geisse [12] indique que les indices sont connus avec cette méthode à quelques unités de la quatrième décimale près. Il n'y a donc pas à se préoccuper des variations de température des prismes, qui se trouvait toujours comprise entre 12 et 15° C.

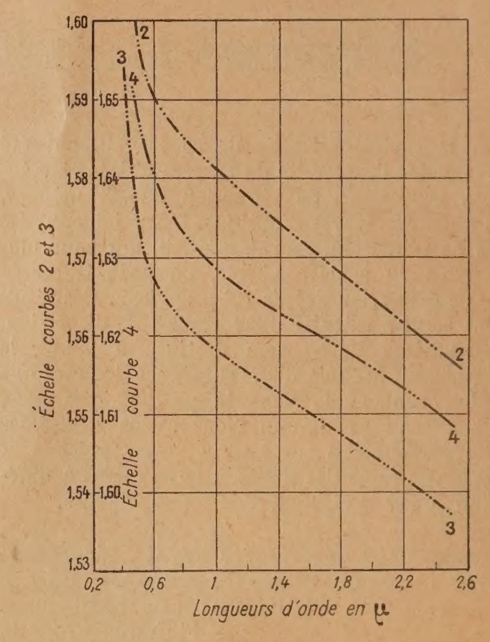


Fig. 2.

Les résultats numériques sont donnés dans les courbes (*fig.* 1 et 2). Nous avons adopté, pour la désignation des prismes, les désignations suivantes :

N°	Verres.	Indices pour la raie *D*.
1.	Schott Farte 44978 (Ba dense, 10 pour 100 La)	1,65988
2.	Schott Farte 33898 (Ba lourd, SK_5)	1,58969
3.	K. 494 (Ba léger)	1,56848
4.	Schott Farte 44673 (Ba léger)	1,55962
5.	Crown 2707	1,53551
6.	M. 519 (Borosilicate série C)	1,51844

Nous utiliserons, dans la deuxième Partie, ces résultats pour comparer la dispersion de ces prismes dans les différentes régions spectrales. Remarquons seulement ici le changement de courbure très net

qui apparaît entre 0,9 et 1,1 μ environ. Il avait déjà été signalé par divers auteurs, et prouve qu'il n'est naturellement pas possible d'extrapoler dans l'infrarouge les résultats obtenus dans le spectre visible.

3. **Calcul des formules de dispersion.** — En possession des résultats numériques, nous avons calculé les formules de dispersion. Nous laisserons de côté la formule de Hartmann, parce qu'elle ne conduit à de bons résultats que s'il s'agit d'interpolation et de domaines restreints. Dans ses applications les plus récentes aux verres d'optique, nous citerons celles de Mme Marquet [5] et Slevogt [10]. Nous ne nous arrêterons pas non plus à la relation, signalée par L. Amy, entre la dispersion de la réfraction dans l'infrarouge d'une part, le visible et l'ultraviolet d'autre part [11], et nous nous bornerons aux formules de Wright et de Ketteler-Helmholtz.

La formule de Wright s'écrit

$$\left.\begin{aligned} & n = cF(\lambda) + \varphi(\lambda) + d; \\ & F(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 - 0{,}0431}, \qquad \varphi(\lambda) = \frac{0{,}008530}{\lambda^{0,9}}. \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Elle donne d'excellents résultats dans le spectre visible et jusque vers 1 μ au plus. Après cette limite, les différences entre les nombres observés et calculés croissent continuellement. Ce résultat avait déjà été trouvé pour d'autres substances par Mlle Geisse [12]. On n'améliore pas la concordance en choisissant des longueurs d'onde, nécessaires au calcul des constantes, dans l'infrarouge au lieu du visible, car alors les indices relatifs à cette dernière région ne représentent plus les résultats des mesures.

La meilleure représentation des données expérimentales s'obtient avec l'emploi de la formule de Ketteler-Helmholtz.

$$n^2 = n_0^2 - \frac{A}{\lambda^2 - \lambda_v^2} + \frac{B}{\lambda_r^2 - \lambda^2},$$

n_0^2, A, B, sont les constantes, λ_v et λ_r indiquent les « longueurs d'onde propres » dans l'ultraviolet ou l'infrarouge.

Nous avons utilisé cette relation sous une forme simplifiée en limitant le développement de $\frac{B}{\lambda^2 - \lambda^2}$ au premier terme

$$n^2 = n_0^2 + \frac{A}{\lambda^2 - \lambda_v^2} - k\lambda^2, \qquad (II)$$

k étant une nouvelle constante.

Pour deux prismes, nous avons conservé aussi le deuxième terme du développement, ce qui donne

$$n^2 = n_0^2 + \frac{A}{\lambda^2 - \lambda_v^2} - e\lambda^2 - f\lambda^4, \qquad (III)$$

avec e et f comme autres constantes.

La formule (II) renferme quatre constantes n_0, A, λ_v et k. Il faudrait prendre les indices de réfraction connus pour quatre longueurs d'onde, ce qui conduit à des calculs assez compliqués. On peut les simplifier en remarquant, comme l'avaient fait d'autres auteurs, que la bande ultraviolette, dont on admet l'existence, se place vers 0,2 μ (3), ce qui, d'ailleurs, se présente sensiblement en accord avec la formule de Wright. Dans ces conditions, il n'y a plus que trois constantes. Pour les déterminer, on a essayé de choisir d'abord deux longueurs d'onde dans le visible et une dans l'infrarouge : les différences entre les nombres calculés et observés croissent rapidement et deviennent inadmissibles à partir de 2 μ environ. De meilleurs résultats s'obtiennent, dans l'infrarouge, en prenant l'indice de réfraction déterminé dans le rouge ($\lambda = 0{,}656\ \mu$) et deux autres indices de réfraction dans l'infrarouge ($\lambda = 1{,}4$ et 2 μ par exemple). Dans ces conditions, l'accord entre les nombres calculés et observés reste de l'ordre des erreurs expérimentales jusqu'au bout du domaine exploré. Dans le visible, l'ensemble des résultats se montre assez satisfaisant, quoique parfois des divergences assez fortes entre le calcul et l'expérience viennent à s'accuser.

Avec la formule (III), nous avons choisi, pour le calcul de la constante supplémentaire, une quatrième longueur d'onde dans le violet pour laquelle on connaît l'indice de réfraction. Il en résulte une meilleure concordance entre les nombres observés dans le visible et ceux que l'on calcule. La formule donne aussi dans l'infrarouge des indices de réfraition dont la précision apparaît comparable avec celle de l'expérience.

On devrait pouvoir calculer, avec les constantes de la formule (III), la longueur d'onde infrarouge λ_r par la formule

$$\lambda_r^2 = \frac{e}{f}.$$

Mais, contrairement à notre attente, e et f apparaissent de signes différents, ce qui conduirait, pour λ_r, à une valeur imaginaire. Nous ne nous expliquons pas la raison de cette difficulté, car la formule, dans l'ensemble, cadre assez bien avec l'expérience. Si l'on ne tient pas compte des signes, on aboutit à des valeurs pour λ_r qui se présentent comme d'un ordre de grandeur acceptable, surtout si l'on se rappelle que la silice donne, entre 8 et 10 μ, une bande de réflexion sélective très intense.

Nous pensons que la reproduction *in extenso* de la comparaison des indices de réfraction calculés et observés, pour chacun des verres, n'offre qu'un médiocre intérêt. Nous nous bornerons donc à donner un exemple d'application pour chacune des formules des dispersions utilisées.

(3) Herzberger [8] indique qu'il peut exister un intérêt à ajouter un second terme ultraviolet, analogue à celui que nous envisageons, mais avec une longueur d'onde propre de $\lambda_v = 0{,}160\ \mu$.

Formule de Wright (I).

Prisme n° 6 (M. 519 Borosilicate).

Avec $\lambda_1 = 0{,}434\ \mu$, $n_1 = 1{,}52855$;
$\lambda_2 = 0{,}589\ \mu$, $n_2 = 1{,}51844$.

$$n = 0{,}00160340\,F(\lambda) + \varphi(\lambda) + 1{,}49943.$$

λ (en μ).	n observé.	n calculé.	Δn.10⁴.
0,405...	1,53193	1,53193	0
0,434...	1,52855	1,52855	0
0,486...	1,52409	1,52399	+ 1
0,589...	1,51844	1,51844	0
0,656...	1,51605	1,51604	+ 0,1
0,995...	1,5094	1,5097	— 3
1,2.....	1,5065	1,5090	—25

Formule de Ketteler-Helmholtz (II).

Prisme n° 5 (2707 Crown).

Avec $\lambda_1 = 0{,}434\ \mu$, $n_1 = 1{,}54748$;
$\lambda_2 = 0{,}589\ \mu$, $n_2 = 1{,}53551$;
$\lambda_3 = 1{,}4\ \mu$, $n_3 = 1{,}5198$.

λ (en μ).	n² observé.	n² calculé.	Δn.10⁴.
0,405...	2,40765	2,40825	— 2
0,434...	2,39469	2,39469	0
0,486...	2,37789	2,37762	+ 0,9
0,589...	2,35779	2,35779	0
0,656...	2,34856	2,34975	—10
0,995...	2,32501	2,32749	— 8
1,2.....	2,3171	2,3184	— 4
1,4.....	2,3098	2,3098	0
1,6.....	2,3025	2,3009	+ 5
1,8.....	2,2949	2,2913	+11
2,0.....	2,2870	2,2810	+20

Avec $\lambda_1 = 0{,}656\ \mu$, $n_1 = 1{,}53250$;
$\lambda_2 = 1{,}4\ \mu$, $n_2 = 1{,}5174$;
$\lambda_3 = 2{,}0\ \mu$, $n_3 = 1{,}5123$.

λ (en μ).	n² observé.	n² calculé.	Δn.10⁴.
0,486...	2,37789	2,38033	— 8
0,589...	2,35779	2,35757	+ 0,7
0,656...	2,34856	2,34856	0
0,095...	2,32501	2,32537	— 1,2
1,0.....	2,32486	2,32515	— 1
1,2.....	2,31710	2,31706	+ 0,1
1,4.....	2,30979	2,30979	0
1,6.....	2,30250	2,30257	— 0,23
1,8.....	2,29492	2,29505	— 0,4
2,0.....	2,28705	2,28705	0
2,1.....	2,28282	2,28283	— 0,03
2,2.....	2,27859	2,27846	+ 0,4
2,3.....	2,27376	2,27394	— 0,6
2,5.....	2,26202	2,26438	— 8

Constantes du premier tableau :

$n_0^2 = 2{,}329583$, $A = 0{,}01001623$, $k = 0{,}0127589$,
$\lambda_\nu = 0{,}2\ \mu$.

Constantes du deuxième tableau :

$n_0^2 = 2{,}322452$, $A = 0{,}0118010$, $k = 0{,}00959530$,
$\lambda_\nu = 0{,}2\ \mu$.

Formule de Ketteler-Helmholtz (III).

Prisme n° 1 (44978 Ba dense Schott Farte).

Avec $\lambda_1 = 0{,}486\ \mu$, $n_1 = 1{,}66794$;
$\lambda_2 = 0{,}656\ \mu$, $n_2 = 1{,}65637$;
$\lambda_3 = 1{,}4\ \mu$, $n_3 = 1{,}6416$;
$\lambda_4 = 2{,}0\ \mu$, $n_4 = 1{,}6328$.

$n_0^2 = 2{,}713041$, $A = 0{,}0141541$, $e = 0{,}0134234$,
$f = -0{,}00019465$, $\lambda_\nu = 0{,}2\ \mu$.

λ (en μ).	n² observé.	n² calculé.	Δn.10⁴.
0,486...	2,78202	2,78202	0
0,589...	2,75520	2,75452	+ 2,3
0,656...	2,74356	2,74356	0
1,0.....	2,71491	2,71456	+ 1,2
1,2.....	2,70372	2,70386	— 0,3
1,4.....	2,69485	2,69485	0
1,6.....	2,68599	2,68557	+ 1,4
1,8.....	2,67649	2,67601	+ 1,6
2,0.....	2,66603	2,66603	0
2,1.....	2,66081	2,66086	— 0,2
2,2.....	2,65560	2,65558	+ 0,08
2,3.....	2,65006	2,65017	— 0,4
2,5.....	2,63770	2,63902	— 4

Rapport des valeurs absolues $\frac{e}{f}$: 68,96, dont la racine carrée est 8,304.

Conclusion. — *Toutes les courbes de dispersion présentent, généralement entre* 0,9 *et* 1,1 μ, *une modification de courbure,* qui avait déjà été signalée par Mme Ramadier. *Il n'est, par conséquent, pas possible d'extrapoler graphiquement les résultats obtenus dans le spectre visible et même jusque vers* 0,9 μ *environ.*

Le calcul des formules de dispersion du type Wright ou Ketteler-Helmholtz conduit à une déduction analogue. En utilisant, pour la détermination des constantes de ces formules, uniquement des résultats se rapportant au spectre visible (même lorsqu'il s'agit de mesures très précises), on arrive à des écarts de plus en plus notables entre le calcul et l'expérience, à mesure que l'on s'avance vers de plus grandes longueurs d'onde.

Manuscrit reçu le 20 juillet 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] RUBENS H. — Über Dispersion ultrarother Strahlen. *Ann. der Physik*, 1892, **45**, 238-261.

[2] RUBENS H. — Prüfung der Ketteler-Helmholtz 'schen Dispersionsformel. *Ann. der Phys.*, 1894, **53**, 257-286.

[3] ABBOT C. G. et FOWLE F. E. — A prism of uniform dispersion. *Astrophys. J.*, 1900, **11**, 135-139.

[4] DREISCH T. et LUEG P. — Der Einfluss der Borsäure auf der Dispersion einiger optischer Gläser im kurzwelligen Ultrarot. *Z. f. Physik*, 1928, **49**, 380-385. — DREISCH T. — *Verh. der physik. Ges.*, 1925, **6**, 25.

[5] MARQUET Mme M. — Étude des indices de réfraction et de la transparence des verres d'optique dans l'infrarouge photographique. *Rev. Opt.*, 1942, **21**, 207-234.

[6] BRAUCKHOFF H. — Brechzahl und Dispersion optischer Glassorten im photographierbaren Ultrarot. *Zeits. Instrum.*, 1939, **59**, 154-162 et 181-190.

[7] KINGSLAKE R. et CONRADY H. G. — A refractometer for the near infrared. *J. opt. Soc. Amer.*, 1937, **27**, 257-263.

[8] HERZBERGER M. — The Dispersion of Optical Glasses. *J. opt. Soc. Amer.*, 1942, **32**, 70-77.

[9] RAMADIER Mme J. — Étude de la dispersion de quelques verres dans le proche infrarouge. *Diplôme d'Études Supérieures*, Paris, 1942; *Rev. Optique*, 1942, **21**, 156-167; *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 555-557.

[10] SLEVOGT H. — Dispersionsverlauf der JENAER optischen Gläser zwischen 400 und 800 m μ und seine Darstellung durch die Hartmann sche Interpolationsformel. *Zeits. Instrum.*, 1940, **60**, 37-48.

[11] AMY (L.). — Relations entre la dispersion de la réfraction dans l'infrarouge d'une part, le visible et l'ultraviolet d'autre part. *C. R. Acad. Sc.*, 1943, **217**, 227-229.

[12] GEISSE Mlle J. — Étude de la dispersion de quelques liquides dans le proche infrarouge. *Diplôme d'Études Supérieures*, Paris, 1943.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 11, JANVIER 1950, PAGE 11.

ÉTUDE PAR DIFFRACTION ÉLECTRONIQUE DE L'OXYDATION DE SURFACES DE ZINC, PRÉPARÉES PAR CLIVAGE OU PAR VAPORISATION

Par H. RAETHER.

Laboratoires de l'O.N.E.R.A., (Paris).

Sommaire. — La structure et l'oxydation des surfaces de zinc, clivées ou vaporisées, a été étudiée par la diffraction électronique. Les faces fraîchement clivées sont recouvertes d'une couche d'oxyde monocristalline dont le réseau est normal (pas de pseudomorphisme) et dont l'orientation est celle du métal sous-jacent (épitaxie). L'effet de réfraction permet de fixer le potentiel intérieur de l'oxyde de zinc à 13,9 ± 1,5 V. On peut déduire de ce que les interférences du zinc ne sont plus visibles que l'épaisseur de la couche d'oxyde qui se forme immédiatement au contact de l'air, est au moins de 20 à 40 Å. L'exposition à l'air pendant plus d'un mois à la température ambiante ne change pas la structure de la surface. En chauffant la surface de zinc à l'air (200-400° C), l'épaisseur de la couche d'oxyde croît et la structure monocristalline se transforme en une poudre bien orientée de grands cristaux d'oxyde qui ont la forme d'aiguilles.

Une surface de zinc attaquée à l'acide orthophosphorique donne le diagramme d'un monocristal de zinc obtenu en fait par transmission à travers les rugosités de la surface.

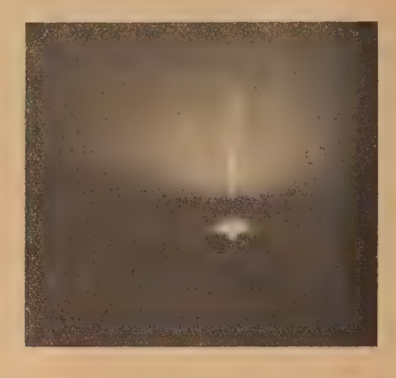
Les couches vaporisées donnent un diagramme Debye-Scherrer de zinc, les sommets des cristaux de zinc étant transversés par les électrons. L'oxyde qui recouvre le métal donne naissance à de faibles anneaux. L'exposition de ces surfaces à l'air à la température ambiante ne modifie pas le diagramme (il en est de même pour une face clivée). A des températures élevées (180-350° C) le film d'oxyde s'épaissit et se transforme en poudre orientée.

Une rapide étude de l'influence d'un film superficiel sur le diagramme électronique en fonction de la rugosité de la surface rend compte des phénomènes observés.

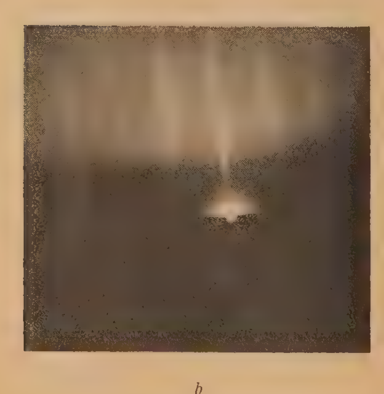
1. **Introduction**. — Si l'on étudie, à l'aide de la diffraction électronique, une surface de zinc fraîchement clivée, on n'observe pas, comme l'on pourrait s'y attendre, le diagramme du zinc, mais celui de l'oxyde de zinc. Ce résultat qui montre la forte activité de la surface fraîche nous a conduit à étudier d'un peu plus près l'oxydation de ce métal.

2. **Préparation des surfaces**. — Nous avons pris comme surfaces soit des faces clivées, soit des couches vaporisées. Les faces clivées d'indice (001) étaient préparées par rupture d'un bâton mono-

cristallin de zinc dans l'air [1]. Les couches vaporisées étaient obtenues par dépôt d'un film de zinc sur une plaque de mica, fraîchement clivée, ou sur une plaque de verre dans un vide de 10^{-4} Torr mesuré à l'aide d'une jauge à ionisation pendant la vaporisation. Leur épaisseur était suffisante pour les rendre opaques. La vaporisation était assez rapide (10 s) pour que le support (mica ou verre) ne s'échauffât pas.



a



b

Fig. 1. — Diagrammes électroniques des faces de zinc fraîchement clivées. Les taches d'interférence un peu diffuses indiquent un monocristal d'oxyde de zinc. Les anneaux et les points ronds (surtout en *b*) proviennent de la transmission des débris cristallins de zinc, demeurés sur les bords de la face clivée.

Dans les deux cas, on est sûr d'avoir à l'origine une surface vierge.

Une analyse spectrographique où l'on comparait le zinc de la *Metallgesellschaft* (Fe $<$ 0,019 pour 100, Pb $<$ 0,008 pour 100) avec le zinc utilisé pour nos essais donnait les impuretés suivantes : Fe $<$ 0,019 pour 100, Pb environ 0,01 pour 100, Cu, Mg, Ag, Ni en traces (pas dosable quantitativement) [2].

[1] Je tiens à remercier tout particulièrement M. Crussard qui m'a fourni ces cristaux.

3. **Diagramme électronique d'une face clivée (001) de zinc.** — La surface fut introduite dans l'appareil de diffraction aussitôt que possible après le clivage, le temps minimum d'exposition à l'air de l'échantillon était à peu près de 1 mn. Le diagramme est caractéristique d'un monocristal d'oxyde de zinc (ZnO) (*fig.* 1) [3]. Les taches d'interférence, réparties sur des lignes verticales, se rejoignent parfois pour former un trait d'intensité presque uniforme (*fig.* 1 *b*). Il y a, dans ce cas, plusieurs monocristaux d'oxyde de zinc légèrement inclinés les uns sur les autres.

On aperçoit sur quelques clichés des interférences de zinc formant soit un diagramme de poudre, soit un diagramme de monocristal *en transmission* (les taches d'interférence ne sont pas déplacées vers les petits angles à cause de l'effet de réfraction) (*fig.* 1 *b*). Ces diagrammes de zinc proviennent de débris cristallins qui sont demeurés sur les bords de la face clivée. Cette circonstance a permis les conclusions suivantes :

a. Existence de l'oxyde de zinc. — La présence de zinc donne l'étalonnage exact du diagramme. On peut en déduire sans erreur possible que les taches d'interférence un peu diffuses de la figure 1 sont celles de l'oxyde de zinc.

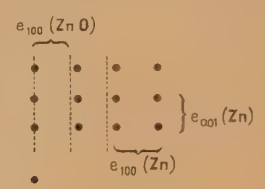


Fig. 2. — Schéma de la figure 1 *b*. Les points représentent les taches d'interférence du zinc, les traits pointillés sont les lignes sur lesquelles sont distribuées les taches d'interférence de l'oxyde.

Par exemple, le rapport des distances (*e*) mesurées sur plusieurs plaques photographiques est (*fig.* 2) :

$$\frac{e_{100}\,(\mathrm{ZnO})}{e_{100}\,(\mathrm{Zn})} = \frac{7{,}1\ \mathrm{mm}}{8{,}65\ \mathrm{mm}} = 0{,}82.$$

La valeur calculée (quotient des distances réticulaires) est

$$\frac{d_{100}\,(\mathrm{Zn})}{d_{100}\,(\mathrm{ZnO})} = \frac{2{,}65\ \text{Å}}{3{,}24\ \text{Å}} = 0{,}817.$$

[2] Je tiens à remercier tout particulièrement M. Keil qui m'a fait les analyses.

[3] Zn : hexagonal, $a = 2{,}659$ Å ; $c = 4{,}92$ Å ; $\frac{c}{a} = 1{,}85$; ZnO : hexagonal, $a = 3{,}24$ Å ; $c = 5{,}18$ Å ; $\frac{c}{a} = 1{,}59$.

Darbyshire [1] a étudié les diagrammes des faces de clivage de zinc et attribué les interférences au zinc métallique. D'après les résultats donnés ci-dessus, ces interférences doivent être interprétées comme provenant de l'oxyde de zinc (4).

b. Potentiel intérieur de l'oxyde de zinc. — L'élaboration du diagramme montre que les taches d'interférence de l'oxyde de zinc sont déplacées vers la surface à cause de l'effet de réfraction, cette remarque prouve que les électrons sont vraiment réfléchis et non transmis à travers des rugosités superficielles. Le potentiel intérieur Φ peut être calculé à l'aide de la formule

$$\Phi = \frac{150\, n^2}{4\, d^2}\left[1 - \left(\frac{e}{e^0}\right)^2\right],$$

d distance réticulaire, *n* ordre d'interférence, *e* composante sur la normale à la surface réfléchissante de la distance de l'origine à la tache d'interférence et influencée par l'effet de réfraction, e^0 la valeur que l'on aurait si la réfraction n'intervenait pas. On peut déterminer la distance e^0 en mesurant les distances d'interférence parallèles à la surface, non modifiées par le potentiel intérieur [2]. Par exemple, on peut calculer la distance e^0 de (001) de l'oxyde en mesurant la distance *e* de (100) de l'oxyde (*fig.* 2) et en posant

$$e^0_{001} = \frac{d_{100}}{d_{001}} e_{100} = 0{,}54\, e_{100}.$$

Le Tableau I donne les valeurs du potentiel calculées.

Jenkins [3] a mesuré le potentiel de l'oxyde qui se forme à l'état de monocristal sur le zinc, chauffé au-dessus du point de fusion. Sa valeur de 12,3 V est en concordance avec les résultats obtenus sur les faces clivées : 13,9 ± 1,5 V.

Tableau I.

Potentiel de l'oxyde de zinc (en V).

h_1, h_2, h_3.	A.				B. Azimuth (100).				B. Azimuth (110).						Moyenne.
(004)...	–	10,8	–	11,7	12,3	–	–	–	14,7	14,7	–	–	–	–	12,8
(006)...	16,3	–	16,8	16,5	17,2	16,2	17,2	16,8	17	15,3	16,2	15,8	16,7	16,6	16,5
(008)...	–	–	–	–	–	–	–	–	14,9	–	–	–	–	–	14,9
															15,4 ± 1,4 V

h_1, h_2, h_3.	C.						Moyenne.
(004)....	9	9	–	–	–	–	9
(006)....	13	13	12,6	12,6	12,6	12,6	12,7
(008)....	13,3	13,3	12,3	12,3	14	14	13,2
							12,4 ± 1,4 V

A, faces fraîchement clivées;
B, faces fraîchement clivées (les photos qui donnaient les valeurs de la colonne B ont été prises des faces fraîchement clivées il y a quelques années);
C, faces clivées et chauffées, *voir* p. 14.

c. Épitaxie de l'oxyde de zinc. — L'orientation relative du réseau de l'oxyde de zinc par rapport au réseau du zinc n'est pas changée : les axes *c* et les axes *a* sont parallèles. Cette épitaxie est surprenante, les distances *a* montrant une différence de près de 20 pour 100.

Royer [4] a montré, dans son étude sur la croissance des halogénures alcalins sur le mica que, si la différence des dimensions entre les deux réseaux dépasse 12 pour 100, l'orientation cesse d'exister. Cependant, on connaît des exceptions de cette règle [5] et le cas du zinc en est une.

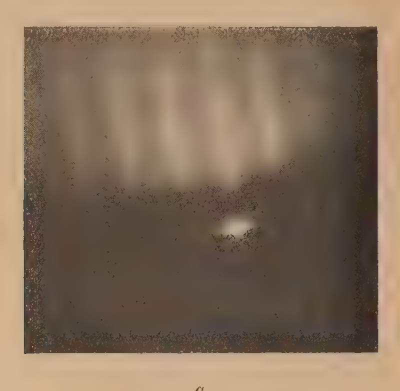
d. Non existence du pseudomorphisme de l'oxyde de zinc. — Les deux réseaux du zinc et de son oxyde sont les réseaux normaux. On n'observe pas de pseudomorphisme signalé par Finch et Quarrell [6] sur les couches de zinc vaporisées; les distances réticulaires de zinc et de son oxyde ne sont pas identiques dans le plan (001).

4. Oxydation d'une face clivée de zinc pendant le temps d'exposition. — *a.* Température ordinaire (17° C). — La surface de zinc fut exposée à l'air sec, en la conservant dans un désiccateur contenant de l'acide sulfurique ($d = 1{,}83$). L'état de la surface était contrôlé de temps en temps par un diagramme de diffraction. Des photos prises après une demi heure, 16, 40 h et 16 jours d'exposition ne montraient pas de changement essentiel

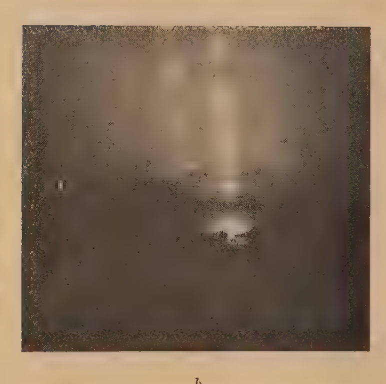
(4) Si l'on clive le zinc sous l'air liquide, l'humidité se condense lors du transport de l'échantillon dans l'air, sur les faces clivées et accélère l'oxydation. Il semble que l'anneau observé sur le diagramme monocristallin de Darbyshire, qui est l'interférence (110) de l'oxyde de zinc, vient d'une oxydation accélérée.

par rapport au diagramme de la figure 1. La surface de l'oxyde conserve donc sa structure.

La brillance optique de la surface reste inchangée même si elle est exposée à l'air plus d'une année; après des années, la surface donne un diagramme Debye-Scherrer de faible intensité dont l'anneau le plus intense correspond à l'interférence (110) de l'oxyde de zinc.



a



b

Fig. 3. — Diagrammes des faces clivées de zinc chauffées à une température de 250° C pendant 13 h. La surface est encore essentiellement couverte d'oxyde de zinc monocristalline. Une poudre d'oxyde commence de se former.

On obtient le même diagramme avec une surface ayant séjourné 24 h sous l'eau distillée; il en résulte que sous l'eau la vitesse d'oxydation est accélérée.

b. Température élevée. — Pour étudier les changements de la structure de la surface aux températures élevées, les échantillons étaient chauffés à l'air dans un four électrique, dont la température était réglable à 5° C près. Les résultats ont été les suivants :

1° 13 h *d'exposition à* 250° C (*fig.* 3). — Les taches d'interférence sur les traits verticaux sont un peu plus prononcées indiquant un léger perfectionnement dans l'orientation des cristaux. On remarque, en outre, des anneaux caractéristiques de l'oxyde de zinc provenant d'une poudre de ZnO formée sur la surface. Si l'on compare ce diagramme avec un diagramme ordinaire de ZnO (fumées obtenues par combustion du zinc à l'air, *fig.* 14), on constate que, dans la figure 3, l'interférence (002) manque et que l'intensité de (110) est plus forte que celle de (103). On en déduit que les cristaux de ZnO ont la forme d'aiguilles, dont les axes sont les axes *c* et qui sont distribuées irrégulièrement sur la face clivée (*fig.* 6).

Les diagrammes après un chauffage de 13 h à 200° C sont identiques. Pour un chauffage de 26 h à 250° C, le diagramme reste inchangé.

2° 13 h *d'exposition à* 300° C. — Les taches d'interférence sont devenues plus larges et indiquent une légère désorientation des cristaux de l'oxyde de zinc. En même temps, l'intensité se concentre dans les taches d'interférence vers l'extrémité correspondant à une réfraction nulle, située sur l'anneau Debye-Scherrer de l'oxyde de zinc, ce qui montre que les interférences se font pour la plupart par transmission (*fig.* 4).

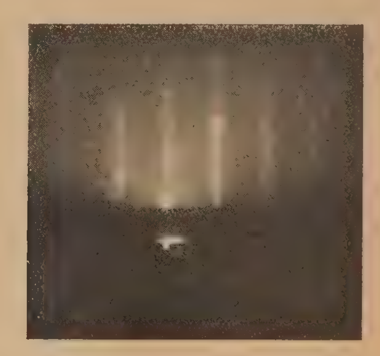


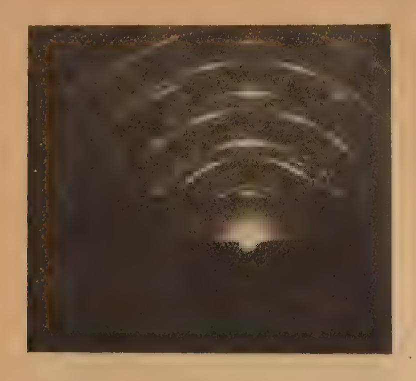
Fig. 4. — Diagramme des faces clivées de zinc chauffées à une température de 300° C.

Ce changement s'amorce déjà à 275° C.

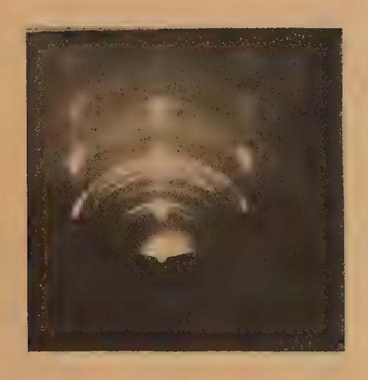
3° 13 h *d'exposition à* 350° C. — Les cristaux qui donnent le diagramme Debye-Scherrer sont agrandis sensiblement (les anneaux continus sont résolus en points) (*fig.* 5 *a*). L'orientation des cristaux est la même qu'en 1° et il y a en plus une orientation qui vient de ce que les prismes reposent avec leurs faces (100) sur la surface (001) du zinc (*fig.* 6). Après 33 h à 350° C, la composition de la surface ne change pas.

On obtient sur certains points de la surface des diagrammes de la figure 5 *b* qui montrent que la surface a conserve, par endroits, son caractère monocristallin.

4° 13 h *d'exposition à* 400° C. — Les surfaces ne montrent que les diagrammes comme la figure 5 *a*.



a



b

Fig 5 *a*. — Diagramme de la surface de zinc chauffée à 350° C. La surface est couverte d'une poudre d'aiguilles d'oxyde de zinc, bien orientée.
Fig. 5 *b*. — Des endroits particuliers de cette surface montrent que l'oxyde monocristallin a continu à exister.

On voit par là que la couche superficielle qui se compose à l'origine d'un film d'oxyde monocristallin

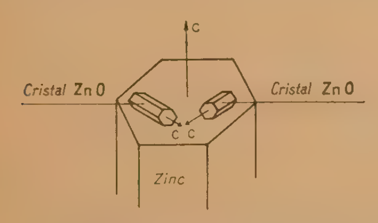
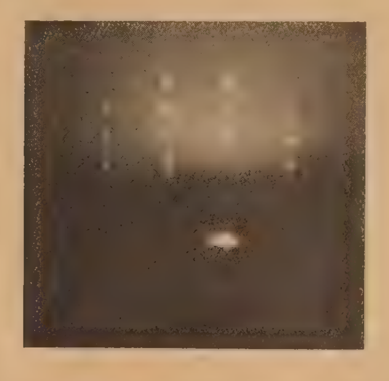


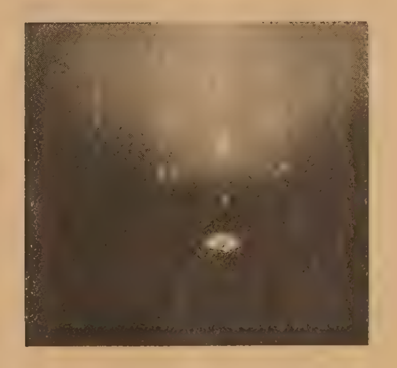
Fig. 6. — Arrangement des aiguilles d'oxyde de zinc sur la face clivée (001) de zinc.

se transforme progressivement à partir de 200° C environ en une poudre orientée d'oxyde de zinc. Le zinc sous-jacent perd progressivement son influence sur l'orientation de l'oxyde lors de la croissance de celui-ci. Ils se forment des cristaux en aiguilles qui se couchent sur la surface, la recouvrant d'une poudre orientée.

5. **Oxydations de faces clivées de zinc attaquées.** — Comme nous l'avons montré, les diagrammes de zinc polis électrolytiquement ne donnaient aucune réflexion venant du zinc [7]. Un film



a



b

Fig. 7. — Diagrammes des surfaces de zinc polies électrolytiquement et attaquées après par l'acide phosphorique. Les interférences de zinc en *a* proviennent d'une transmission des rugosités de la surface. *b* : la surface est chauffée à 200° C pendant une heure. Une couche monocristalline d'oxyde de zinc s'est formée sur le zinc.

superficiel sur la face polie empêche les électrons qui frappent la surface sous incidence rasante, d'atteindre le métal. Si l'on attaque cependant fortement par l'acide orthophosphorique une surface de zinc polie électrolytiquement, on obtient parfois des diagrammes de zinc par transmission (*fig.* 7 *a*), identiques à ceux de la figure 1 *b*. Il n'y a pas de réfraction à cause de la transmission de la surface rugueuse. Si l'on expose ces échantillons à l'air pendant 64 h,

le diagramme n'indique aucun changement. Ce résultat est en accord avec les résultats de la page 13. Si l'on chauffe la surface à 200° C pendant une heure, on aperçoit à côté des interférences de zinc celles de l'oxyde de zinc (*fig.* 7 *b*). On en déduit les mêmes résultats quant à l'orientation de l'oxyde de zinc sur le zinc et quant au pseudomorphisme dont il était question page 13.

Remarque sur l'intervention d'un effet dynamique. — Si l'on calcule l'intensité relative des taches d'interférence d'une face clivée (001) en tenant compte du facteur de structure [5], mais en négligeant la chute d'intensité produite par le facteur de diffusion atomique, on obtient, dans les deux directions principales, l'une parallèle à l'axe (100), l'autre parallèle à l'axe (110), les valeurs suivantes :

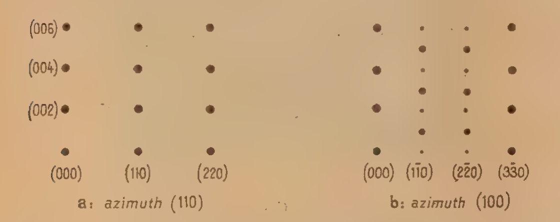


Fig. 8. — Schéma du diagramme d'interférence de la face (001) de zinc dans différents azimuths. En *a*, tous les points ont l'intensité $2A$, en *b* l'intensité des points correspond à $2A$, $\sqrt{3A}$ et A suivant leur grosseur.

En comparant ce schéma aux photos de la figure 7, qui correspondent à la figure 8 *b*, on remarque l'existence d'interférences interdites d'indice (003) (005), (007) et l'on aperçoit que la variation de l'intensité prévue sur le schéma de la figure 8 *b* n'est pas observable.

Ces écarts sont dues à un effet dynamique, les faisceaux d'interférence jouant le rôle de faisceaux primaires sont diffractés une deuxième fois et diffusés ainsi dans des directions interdites. Il en résulte un nivellement des intensités portées dans le tableau *b*. Cet effet, signalé par l'auteur [2] sur les surfaces de FeS, etc. et confirmé plusieurs fois par la suite, rend également compte des résultats obtenus dans l'azimuth (100).

6. **Oxydation d'une couche de zinc vaporisée.** — Les diagrammes Debye-Scherrer de ces couches vaporisées indiquent de gros cristaux de zinc dont les rugosités sont traversées par les électrons (*fig.* 9).

[5] $S = 4\left[1 + e^{i\pi l} e^{i\frac{\pi}{3}(2h+4k)}\right].$

$S = 0$, l impair et $h + 2k = 3n$;

$S = \sqrt{3}A$, l impair et $h + 2k = 3n + 1$ ou $3n + 2$;

$S = 2A$, l pair et $h + 2k = 3n$;

$S = A$, l pair et $h + 2k = 3n + 1$ ou $3n + 2$.

On observe, en plus, de très faibles anneaux d'oxyde de zinc (*fig.* 10) sensiblement moins nets que ceux du métal, indiquant des dimensions des cristaux de 50 à 100 Å.

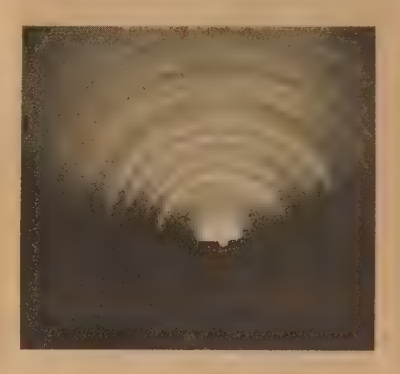


Fig. 9. — Diagramme d'une couche de zinc vaporisée.

Pour étudier l'oxydation, les échantillons furent exposés à l'air, à la température ambiante ou à une température élevée.



Fig. 10. — Schéma d'un diagramme d'une couche de zinc vaporisée.

a. Température ordinaire. — Des échantillons qui donnaient un diagramme comme celui de la figure 9 étaient exposés à l'air sec (dessiccateur à acide sulfurique de densité 1,83). Des examens répétés, au cours d'une exposition de six mois, ne décèlent aucun changement.

b. Température élevée. — L'oxydation est accélérée par chauffage de l'échantillon, Des diagrammes furent effectués sur des couches chauffées.

1° 13 h à 180° C;

2° 13 h à 250° C;

3° 13 h à 300° C;

4° 13 h à 350° C.

1° L'épaisseur de la couche d'oxyde a augmenté, les anneaux de l'oxyde sont devenus un peu plus intenses que ceux du métal.

2° L'intensité des anneaux d'oxyde continue à croître si l'on chauffe l'échantillon pendant 13 et 26 h à 250° C (*fig.* 11). Les anneaux du zinc (anneaux composés de points) restent encore visibles.

3° Les cristaux de l'oxyde ont grandi et les anneaux commencent à se résoudre en points. Les anneaux du métal sont à peu près disparus (*fig.* 12).

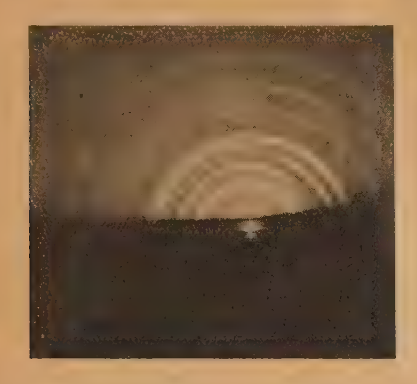


Fig. 11, 12 et 13. — Diagramme d'une couche de zinc vaporisée après chauffage à des températures différentes pendant 13 h.

Fig. 11. — 250° C.

4° La surface ne contient que de gros cristaux d'oxyde de zinc (*fig.* 13).

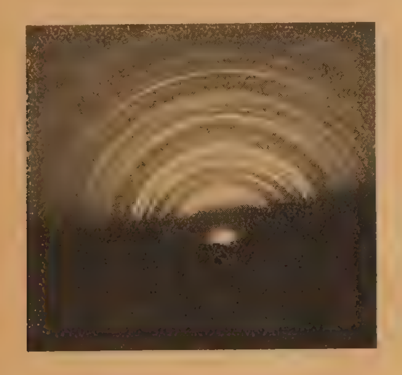


Fig. 12. 300° C.

Dans tous les cas (1°-4°), le diagramme montre que les cristaux de l'oxyde, probablement des aiguilles, sont fortement orientés : leurs axes — axes c —, sont distribués irrégulièrement dans le plan de la couche, comme on peut le voir par une comparaison du diagramme obtenu avec celui d'une poudre d'oxyde de zinc, formée par combustion du zinc à l'air (*fig.* 14) : le premier diagramme ne contient pas l'interférence (002) (le deuxième anneau dans la figure 14) et l'intensité (110) est plus forte que celle de (103).

Nous n'avons pu trouver aucune trace du pseudomorphisme de l'oxyde sur le métal vaporisé, signalé par Finch et Quarrel [6]. Les distances correspondent aux réseaux connus. Le pseudomorphisme se traduirait, d'après ces auteurs, par le fait que les anneaux (101), (102), (103), etc. sont doublés : les distances a_{Zn} et a_{ZnO} devant être égales, la différence des distances c_{Zn} et c_{ZnO} (4,38 et 6,86 Å) produirait, au

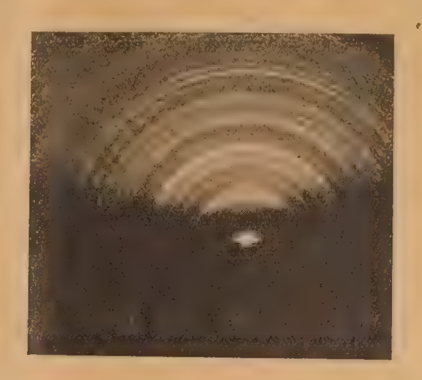


Fig. 13. — 350° C.

voisinage des interférences (101), (102), etc., du zinc un anneau de l'oxyde pseudomorphique.

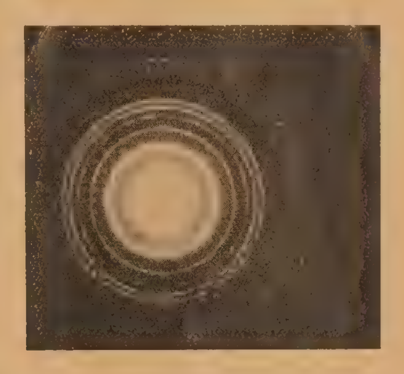


Fig. 14. — Diagramme d'une poudre de zinc, faite par combustion à l'air.

De tels anneaux n'ont pu être observés, ni à la température ambiante, ni à des températures élevées.

7. Discussion. — Une face clivée de zinc se recouvre donc dès son contact avec l'air d'une couche d'oxyde monocristalline orientée parallèlement au cristal métallique. Elle est suffisamment épaisse pour masquer le diagramme de zinc.

On peut déterminer une limite *inférieure* de l'épaisseur D de la couche d'oxyde. On a (*fig.* 15)

$$D = \theta L,$$

où L est le parcours des électrons dans le film d'oxyde et θ l'angle d'incidence. Le long de leur parcours,

les électrons sont diffusés et produisent des raies d'interférence. Le faisceau primaire est, par suite, affaibli et à partir d'un parcours maximum l'intensité des interférences devient négligeable. Le parcours maximum dans l'oxyde de zinc est, d'après les expériences par transmission, 500-1000 Å. Le diagramme du zinc n'étant plus visible, on peut mettre pour L la valeur de 500-1000 Å et la couche d'oxyde sera, pour $\theta = 0{,}04$, d'une épaisseur $D = 20$ à 40 Å au moins.

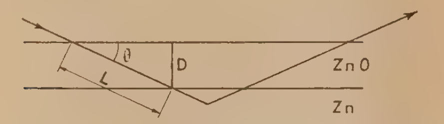


Fig. 15. — Parcours des électrons dans un film superficiel qui est formé sur une surface lisse.

Cette conclusion n'est pas en contradiction, comme on pourrait le croire, avec les diagrammes de zinc *métallique* obtenus pour des couches vaporisées. Les faces clivées constituent, en effet, des surfaces très lisses et le diagramme correspondant est beaucoup plus sensible à la présence d'un film d'oxyde que dans le cas des surfaces rugueuses obtenues par vaporisation ou par attaque d'une face clivée et polie électrolytiquement. Le cas d'une surface rugueuse est représenté figure 16.

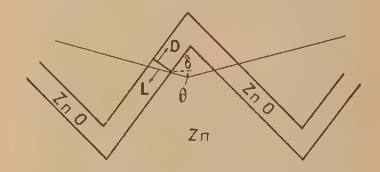


Fig. 16. — Parcours des électrons dans un film superficiel qui est formé sur une surface rugueuse.

On a

$$D = L \sin(\delta + \theta) \sim L \sin\delta \qquad (\delta \gg \theta).$$

En général, δ est de l'ordre de 60° ($\sin\delta = 0{,}8$), ce qui donne $D = 0{,}8\,L$. (Dans le cas d'une surface lisse on obtient $D = 0{,}04\,L$.)

On voit qu'un film superficiel de 20 à 40 Å à qui correspond sur une surface lisse un parcours de 500 à 1000 Å pour les électrons, entraîne, sur une surface rugueuse, un parcours sensiblement égal à son épaisseur. Donc, la couche d'oxyde de zinc est à peine décelable sur une surface rugueuse.

L'épaisseur de la couche d'oxyde sur les faces autres que la face (001) a une valeur qui n'est pas forcément identique, mais il est vraisemblablement du même ordre, comme on peut le déduire des anneaux d'oxyde dans les diagrammes de couches vaporisées.

Si l'on essaie de poursuivre l'oxydation à la température ambiante, on ne trouve ni une augmentation sensible de l'épaisseur de la couche d'oxyde, ni un changement dans sa structure : les diagrammes de réflexion montrent que la structure de la surface d'oxyde reste la même au cours de l'exposition à l'air et les diagrammes des couches vaporisées montrent que l'épaisseur du film, mesurée par l'intensité des anneaux de l'oxyde par rapport à ceux du zinc ne change pas sensiblement.

Cependant, à des températures élevées (> 200° C), la couche d'oxyde croît sensiblement et change aussi de structure comme on peut le voir par les figures 3-13.

Il est remarquable que les couches d'oxyde sur la face clivée de zinc faites par oxydation anodique dans un bain de soude montrent le même comportement d'après les travaux de Huber et Bieri [8] : les auteurs détachaient la couche d'oxyde de la surface de zinc et examinaient sa structure par diffraction électronique en transmission. Ils ont trouvé que les couches d'oxyde très minces (100-150 Å) sont fortement orientées avec les axes c des deux réseaux (métal et oxyde) à peu près parallèles. Les films ne sont pas monocristallins, mais composés de cristaux désorientés de 10° les uns sur les autres. Les couches plus épaisses perdent cette orientation.

Si l'on compare les résultats de Huber et Bieri à ceux de cette étude, on s'aperçoit que l'orientation croît lorsque l'épaisseur diminue. La couche d'oxyde naturel qui est monocristallin est, en effet, beaucoup plus mince (20 à 40 Å) que les couches obtenues par oxydation anodique (100-150 Å). Les films plus épais obtenus par chauffage à l'air montrent une désorientation sensible des axes c du métal et de l'oxyde.

Des expériences détaillées sur l'oxydation du zinc polycristallin ont été faites par Vernon, Akeroyd et Stroud [9] en mesurant l'augmentation du poids de l'échantillon en fonction du temps d'exposition. Ils ont pris comme surfaces d'origine des surfaces attaquées chimiquement, abrasées par le papier émeri ou polies électrolytiquement (bain de potasse). L'augmentation du poids de la surface est une fonction linéaire du logarithme du temps d'exposition. Elle dépend aussi de la température : alors qu'elle ne change pas beaucoup au-dessous de 225° C environ, elle croît très vite si l'on dépasse cette température de 225° C.

Pour expliquer ces résultats, les auteurs ont donné un essai de théorie en admettant qu'une couche d'oxyde amorphe recouvre la surface au-dessous de la température de 225° C. Au-dessus de 225° C, ce film recristallise et prend une structure granuleuse, mais suffisamment dense pour donner la loi logarithmique de croissance. On conclut à une structure granuleuse à cause du défaut de couleurs d'interférence.

Les résultats donnés dans cette étude obligent à

modifier un peu les détails de cette théorie. Tout d'abord les diagrammes de diffraction montrent qu'on ne part jamais d'une surface vierge, mais toujours d'une surface qui est assez oxydée, même dans le cas d'une surface clivée ou vaporisée. (Les films d'oxyde formés après chauffage sur une surface de zinc soumise à une abrasion au papier émeri ont une épaisseur plus petite que sur une surface attaquée [9]. Cela vient de ce qu'une telle surface est recouverte d'une couche d'oxyde épaisse à grains très fins née pendant l'écrouissage [10] et qui forme un film plus dense et, par suite, plus protecteur que le film d'oxyde formé sur une surface attaquée ou clivée.) D'autre part, le film au-dessous de la température de 225° C n'est pas « amorphe », mais composé de petits cristaux (50 à 100 Å) qui sont manifestement plus petits que les cristaux de zinc (le zinc diffère alors essentiellement de l'aluminium qui donne une couche « amorphe » d'alumine [11]). Cette couche à grains fins croît à peine au cours de l'exposition à l'air à la température ordinaire et la structure ne change pas; cependant, à partir d'une température de 200° à 250° C, l'épaisseur augmente rapidement en même temps que les cristaux commencent à grossir en formant des aiguilles, ce qui fait comprendre la structure granuleuse. Cette étude montre que la diffraction électronique par la méthode de réflexion peut donner des renseignements assez détaillés sur l'état d'oxydation d'une surface à condition de tenir compte de l'influence de la rugosité superficielle sur le diagramme.

Je tiens à remercier M. A. Guinier qui a bien voulu s'intéresser à ce travail.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Darbyshire J. A. — *Phil. Mag.*, 1933, **16**, 761.
[2] Raether H. — *Z. f. Physik*, 1932, **78**, 527.
[3] Jenkins R. O. — *Proc. Phys. Soc.*, 1935, **47**, 109.
[4] Royer L. — *Bull. Soc. franç. Minéralogie*, 1928, **51**, 7.
[5] Thomson G. P. — *Proc. Phys. Soc.*, 1948, **61**, 415.
[6] Finch J. I. et Quarrell A. G. — *Proc. Phys. Soc.*, 1934, **46**, 148.
[7] Raether H. — *Métaux et corrosion* 1949, **24**, 145.
[8] Huber K. et Bieri B. — *Helv. Phys. Acta*, 1948, **21**, 375.
[9] Vernon W. H. J., Akeroyd E. J. et Stroud E. G. — *Inst. of Metals*, 1933, 301.
[10] Raether H. — *Z. f. Physik*, 1947, **124**, 286; *Métaux et corrosion*, 1947, **22**, 2.
[12] Preston G. D. et Bircumshaw L. L. — *Phil. Mag.*, 1946, **22**, 654. — Raether H. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, 1247; *Métaux et corrosion*, sous presse.

SCELLEMENT ÉTANCHE AU VIDE, DU VERRE ET DU MICA

Par JACQUES LABEYRIE.
Commissariat à l'énergie atomique.

Sommaire. — Les feuilles de mica, même minces (0,01 mm), peuvent être scellées au verre par l'intermédiaire d'un émail en poudre (G.50 des verreries de Bagneaux-sur-Loing) qui fond à 550° et se ramollit à 354°. Le même émail peut servir pour sceller le mica sur un métal de coefficient de dilatation compris entre 85 et 110.10^{-7}.

Le scellement étanche du mica au verre se fait habituellement au moyen de cires ou de résines, polymérisées ou non. Ces produits, simples à appliquer, ont l'inconvénient de ne pas résister à des élévations de température, même faibles (60°)*, sans se ramollir. En outre, si des vapeurs organiques se trouvent en contact avec le scellement, il y a, en général, absorption de cette vapeur en quantité plus ou moins grande par le scellement.

Pour pallier à ces inconvénients qui sont assez gênants dans la construction de certains appareils, tels que les compteurs de Geiger, on a cherché un scellement minéral étanche, à point de ramollissement suffisamment élevé et dont le coefficient de dilatation soit intermédiaire entre celui du mica et celui du verre utilisés. Bien que les coefficients de dilatation du mica soient mal définis et probablement variables avec les variétés, on peut supposer qu'ils sont voisins de 100.10^{-7} par degré centigrade. Il est donc logique d'essayer de le souder au moyen d'un verre intermédiaire à des verres ayant un coefficient de dilatation pouvant descendre aux environs de 80.10^{-7}, ou, au contraire, à des alliages ayant un coefficient de dilatation de l'ordre de 120.10^{-7} au maximum. Il faut prendre garde que la température ne s'élève pas au-dessus de 620° lors du scellement, car à partir de cette température le mica s'altère. C'est donc plutôt un émail qu'un verre qu'il convient d'utiliser pour ce genre de scellement. Dans une assez ancienne publication américaine (1), une méthode utilisant comme émail intermédiaire un verre fusible au borate de plomb a été décrite. Elle a été reprise plus tard par d'autres auteurs américains (2).

Nous avons utilisé avec succès une méthode semblable pour souder le mica à un verre à la chaux en utilisant comme émail intermédiaire le G.50 des verreries de Bagneaux-sur-Loing, dont le point de fusion (3) est vers 550° et le point de ramollissement à 354°. Le verre à la chaux est du verre ordinaire, tel que celui fabriqué par les verreries de Choisy-le-Roi et qui a un coefficient de dilatation de l'ordre de 85.10^{-7}, son point de ramollissement est supérieur à 600°. Voici la méthode utilisée :

On prépare un rebord sur le tube de verre, que l'on rode pour le rendre sensiblement plan. La largeur de la zone rodée ne doit pas être inférieure à 4 ou 5 mm. L'émail, préalablement réduit en poudre très fine, et humecté d'eau distillée jusqu'à avoir la consistance d'une crème, est ensuite étendu au pinceau sur la partie rodée, de façon à former une couche régulière d'environ 1 mm d'épaisseur. Le mica est alors appliqué sur cette pâte.

Le diamètre du mica doit être inférieur de 4 mm environ au diamètre extérieur de la partie rodée. On recouvre alors le bord du mica d'un anneau de la pâte, ayant à peu près les mêmes dimensions que le premier anneau. On laisse sécher une heure à l'air et l'on porte les pièces ainsi préparées dans un four pouvant monter à 600°. La montée à 600° doit être assez lente (une heure environ). On maintient 15 mn à cette température et on laisse refroidir. Le refroidissement doit durer 3 ou 4 h au moins entre 400° et la température ambiante.

Une fois refroidies les pièces ont l'aspect suivant : le mica est bien tendu; la poudre d'émail a fondu et a formé un anneau régulier, transparent, brillant et lisse, légèrement jaunâtre. A travers, on aperçoit le mica parfaitement soudé, sans faille ni bulle d'air.

On peut faire le vide sur un tel scellement, la feuille de mica ayant une épaisseur de l'ordre de 1/100e de millimètre et un diamètre de l'ordre de 30 mm et le dégazer à 300° sans qu'il ne cède.

Avec le même émail, on peut sceller du mica à un alliage dont le coefficient de dilatation reste compris entre 85 et 110.10^{-7} à la température ordinaire tel que la platinite, le Dilver S ou le Dilver O, fabriqués par les Aciéries d'Imphy, qui sont des ferronickels, ou les alliages de ferrochrome à 30 pour 100 de chrome, utilisés couramment aux États-Unis (Sealmet 1, Allegheny 55, Ascoloy 446, Carpenter 27), mais difficiles à trouver en France.

* 110° à 130° pour les résives genre "Araldise".

(1) J. S. DONAL Jr., *The Review of Scientific Instruments*, 1942, **13**, p. 266.

(2) C. S. WU. C. L. MEAKER et H. A. GLASSFORD, *The Review of Scientific Instruments*, 1947, **18**, p. 693.

(3) Le point de fusion ayant ici le sens suivant : température à laquelle, si on l'y chauffe 15 mn, l'émail préalablement réduit en poudre s'agglomère et mouille un support en mica sur lequel il est répandu.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1949.

SUR L'EMPLOI DE L'ÉMULSION PHOTOGRAPHIQUE POUR LA DÉTERMINATION DE LA RADIOACTIVITÉ DES ROCHES PAR L'EXAMEN DES TRAJECTOIRES DES RAYONS α

Par R. COPPENS.

Professeur de Sciences physiques au Lycée de Vannes (Morbihan).

Sommaire. — Emploi de la plaque photographique pour la détermination de la teneur en uranium et en thorium des roches. Évaluation du rapport $\frac{C_{Th}}{C_U}$ et de la teneur globale de quelques roches du sol breton. Répartition de la radioactivité :

1° inclusions très petites (quelques dizaines de microns carrés) à très forte concentration;

2° cristaux atteignant 1 mm et contenant du thorium (1 pour 100) inégalement réparti, avec peu ou pas d'uranium;

3° grains petits (quelques centièmes de millimètres carrés) à forte concentration en thorium (75 pour 100) qui pourraient être de la thorite pure.

Introduction. — Depuis longtemps, on a montré que tous les terrains et toutes les roches contiennent des traces plus ou moins faibles de matières radioactives et de nombreuses méthodes ont été envisagées pour mettre en évidence cette radioactivité.

Celle qui utilise la plaque photographique semble, de beaucoup la plus intéressante.

On sait, depuis les expériences de Becquerel que la plaque photographique donne une grossière répartition des corps radioactifs contenus dans une roche. Certaines plaques, d'invention moderne, permettent actuellement la numération individuelle des particules α, chacune d'elle laissant, après développement, la trace de sa trajectoire dans l'émulsion. Grâce à leur sensibilité, on effectue des dosages qui, sans être très précis, donnent des renseignements utiles et l'on décèle de très faibles radioactivités.

L'exposé qui suit a pour objet de rendre compte des résultats des travaux que nous avons effectués sur ce sujet, jusqu'à ce jour.

I. — Méthode.

Les plaques utilisées sont des plaques Ilford C_2. Pour diminuer le fading très important sous le climat humide de la Bretagne [1] nos émulsions ont été imprégnées d'une solution de borate de sodium à 30 g : l, puis séchées avant l'impression [2].

Ces émulsions ont été recouvertes d'une roche polie ou d'une roche en poudre. Les poses ont duré de quelques jours à quelques semaines.

Tous les calculs ont été effectués d'après la méthode exposée dans ce journal par Mme I. Curie [3]. Rappelons brièvement les résultats.

Évaluation du rapport des concentrations en uranium et en thorium. — Les roches contiennent généralement à la fois tous les dérivés de l'uranium et tous ceux du thorium.

Les rayons α les plus longs émis par les corps radioactifs sont ceux du Th C' (8,57 cm), du Ra C' (6,91 cm), de l'Ac A (6,46 cm) et du Th A (5,64 cm).

Ces rayons, mesurés sur la plaque et qui correspondent à plus de 7 cm d'air sont certainement ceux du Th C'. Ceux dont les parcours dans l'air sont compris entre 5,8 et 7 cm sont, soit ceux du Th C' qui ont été partiellement absorbés, soit ceux du Ra C' et de l'Ac A.

Si ν_1 est le nombre des rayons de parcours supérieur à 7 cm et ν_2 le nombre de ceux compris entre 5,8 et 7 cm, le calcul donne le rapport $\frac{C_U}{C_{Th}}$ des concentrations en uranium et en thorium :

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 0{,}8 + 3{,}3\,\frac{C_U}{C_{Th}}.$$

Notons que la mesure ne donnera des résultats acceptables que lorsque le nombre des trajectoires sera suffisamment grand car on ne tient compte, dans ce calcul, que des trajectoires les plus longues.

Dosage par la numération des rayons. — Dans un corps radioactif, le nombre N des rayons α

émis par seconde et par centimètre carré est

$$N = 3.10^{3}\, C_{U}\, d K (33 - 8{,}3\rho) + 10^{3}\, C_{Th}\, d K (28{,}7 - 6\rho),$$

C_U et C_{Th} étant les concentrations en uranium et en thorium, d, la densité de la matière examinée, ρ, le parcours minimum des rayons observables sur la plaque (mesuré en centimètres d'air), et K le rapport entre le parcours d'un rayon dans le corps et son parcours dans l'air. On a

$$K = \frac{0{,}85.10^{-4}}{d \sum \frac{cs}{A}},$$

avec s : pouvoir d'arrêt, c : concentration et A : poids atomique de chaque constituant du corps. Si nous posons $K' = \frac{0{,}85}{\sum \frac{cs}{A}}$ et si nous admettons qu'avec les instruments utilisés $\rho \simeq 3\,\mu$ soit environ 6 mm d'air, nous trouvons

$$N = (8{,}4\, C_U + 2{,}5\, C_{Th}) K'.$$

Si nous ajoutons à cette équation, une seconde relation qui donne le rapport $\frac{C_U}{C_{Th}}$, nous voyons que la connaissance du nombre N de rayons émis par centimètre carré et par seconde permet d'évaluer la concentration en uranium et en thorium de l'émetteur.

Pour déterminer le nombre N, nous évaluons la moyenne du nombre des trajectoires inscrites par champ de microscope pendant un temps de pose donné et ce résultat est ramené à 1 cm² et à 1 s.

II. — Résultats.

A. — Teneur des roches en matières radioactives.

Nous avons évalué la teneur en matières radioactives d'un certain nombre de roches du sol breton (granites, gneiss, micaschistes, etc.) et donnons les résultats ci-après :

Rapport des concentrations $\frac{C_{Th}}{C_U}$. — Les plaques sont examinées avec un microscope de fort grossissement (objectif à immersion). Les mesures des longueurs des trajectoires sont faites à 1 μ près, ce qui correspond dans l'air à moins de 3 mm.

Nous avons pris soin de ne mesurer que les trajectoires émises à la surface de l'émulsion ou au-dessus de cette surface et presque parallèles à cette surface. Le sens des trajectoires se trouve facilement, car la fin du parcours est formés de grains plus serrés. Cela élimine les quelques traces de rayons provenant d'impuretés contenues dans la gélatine et dans le verre.

Nature de la roche.	Origine.	$\frac{C_{Th}}{C_U}$.
Micaschiste.........	Quiberon (Morbihan)	3,4
»	Arradon (Morbihan)	2,3
Gneiss granulitique.	Le Renneveau en Vannes (Morbihan)	2,75
Gneiss............	Kerhino en Vannes (Morbihan)	1,7
Granulite..........	Ile-aux-Moines (Golfe du Morbihan)	3,6
Granite............	Quiberon	2,75
»	Bretagne (Coll. M. Demay)	2,8
Sable.............	Pénestin (Morbihan)	2,4

Dans l'ensemble ces résultats confirment ceux obtenus antérieurement par d'autres auteurs utilisant des méthodes différentes et la valeur moyenne $\frac{C_{Th}}{C_U} = 2{,}5$ généralement adoptée.

Nous devons cependant signaler que quelques roches (micaschiste de Quiberon et granulite de l'île aux Moines) semblent avoir une teneur en thorium légèrement plus élevée.

Ceci pourrait être dû à la présence de cristaux radioactifs à forte teneur en thorium et qui modifieraient le rapport des concentrations de l'ensemble. Nous avons rencontré de telles inclusions, pour la première fois dans un granite, mais les avons également reconnues sans doute possible dans les roches citées.

Activité moyenne de quelques roches. — En admettant le rapport moyen $\frac{C_{Th}}{C_U} = 2{,}5$, nous avons pu déterminer la concentration en uranium et en thorium de quelques roches prélevées au hasard dans le sol de la région de Vannes.

Le nombre N de rayons α émis par centimétre carré et par seconde est

$$N = (8{,}4\, C_U + 6{,}25\, C_U) K',$$

soit

$$N = 14{,}65\, C_U K'.$$

Les roches étant pulvérisées, les inclusions radioactives sont très fines et nous pouvons adopter, pour coefficient d'absorption K', celui du granite, soit $K' \simeq 13$, ce qui donne

$$C_U \sim \frac{N}{200}.$$

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

Nature de la roche.	Origine.	$N.10^3$.	$C_U.10^5$.	$C_{Th}.10$.
Gneiss................	Kerhino-Vannes	1,0	0,5	1,25
»	Bernus-en-Vannes	0,9	0,45	1,1
Granulite..............	Ile-aux-Moines (Morbihan)	0,8	0,4	1
»	Ty Gward	1,1	0,55	1,37
	La Trinité-sur-Mer (Morbihan)	2,6		
Granite porphyroïde....	Les Trois-Rois-en-Vannes		1,3	3,2
Granite................	Aber Ildut (Finistère)	1,25	0,6	1,5
»	Bretagne (Coll. M. Demay)	2,0	1	2,5
Micaschiste.............	Quiberon (Morbihan)	2,0	1	2,5
»	Arradon (»)	1,9	1	2,5
Sérito-Schiste..........	Saint-Nolff (»)	0,85	0,4	1
Schiste à amphibole.....	Cosquéric-en-Vannes	2,6	1,3	3,2
Gneiss glanduleux......	Tréalré	3,0	1,5	3,75
Grès quartzite..........	Ile d'Ilur (Morbihan)	0,8	0,4	1
Schiste................	Larré	1,36	0,7	1,7
Sable granitique........	La Trinité-sur-Mer	1,25	0,6	1,5
» stannifère........	Pénestin (Morbihan)	13	6,5	16
Granulite..............	Ile de Gavrinis (Morbihan)	1,3	0,65	1,6
»	Lamor Baden Est (Morbihan)	1,25	0,6	1,5
»	» Ouest (»)	0,5	0,25	0,62
Granite................	Le Garo (Morbihan)	1	0,5	1,25
»	Lignole (»)	8	4	10
»	Le Guern (»)	3,4	1,7	4,25

Ces résultats nous montrent que les roches étudiées ont des teneurs globales en uranium de l'ordre de 10^{-5} et en thorium de l'ordre de 2 à 3.10^{-5}.

Ils correspondent très exactement à ceux cités par Mme Curie [4] qui donne, pour les granites et les gneiss, une teneur moyenne en uranium de l'ordre de $0{,}8.10^{-5}$ et une teneur moyenne en thorium atteignant 2.10^{-5} et pour les grès et les schistes des concentrations de $C_U = 0{,}4.10^{-5}$ et $C_{Th} = 1{,}2.10^{-5}$.

Ils confirment également ceux d'Evans [5] qui admet pour les granites des concentrations en uranium variant de $0{,}3.10^{-5}$ à $2{,}53.10^{-5}$ et des concentrations en thorium allant de $0{,}6.10^{-5}$ à $4{,}1.10^{-5}$.

Une exception doit être faite pour le sable de Pénestin qui est nettement plus riche. Cela s'explique par le fait que ce sable a été déposé par les eaux de la Vilaine qui l'ont arraché aux roches désagrégées des terrains traversés. Il s'est produit une lévigation naturelle avec accumulation en certains endroits de l'estuaire, à Pénestin par exemple, des éléments lourds. Comme on trouve dans ce sable des métaux tels que de l'étain et de l'or, il était naturel d'y rencontrer les inclusions radioactives contenues dans les roches.

On peut également remarquer le granite de Lignole pris en bordure d'un massif granitique et dont la concentration en uranium atteint 4.10^{-5}, ce qui dépasse la moyenne ordinaire. Ce granite fait l'objet d'études spéciales.

B. — Répartition de la radioactivité dans les roches.

Nous avons constaté que dans les roches étudiées, la répartition de la radioactivité n'est pas uniforme [6] La majeure partie des trajectoires des rayons α semble provenir de grains radioactifs inclus dans les roches.

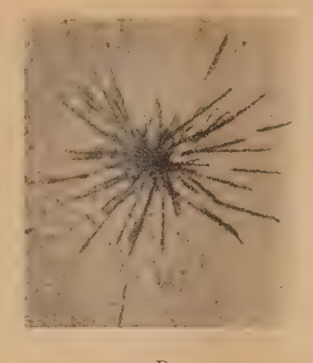
Les dimensions de ces grains sont très variables : certains, très petits et n'ont que quelques microns de diamètre; d'autres, beaucoup plus importants, atteignent le millimètre. Mais, en dehors de ces inclusions, on rencontre des trajectoires isolées. Des travaux en cours, avec de très longues poses, permettront de dire s'il s'agit de rayons provenant de grains extrêmement fins ou d'une matière radioactive diluée.

1. Grains radioactifs de petites dimensions [7]. — Les grains de petites dimensions donnent parfois des rayons α qui sont issus d'une petite surface. Généralement, le grain se trouve séparé de l'émulsion par une couche très mince d'air. La plaque présente alors l'aspect de la figure 1 A. En prolongeant les trajectoires des rayons α, on détermine une petite surface non impressionnée ou impressionnée seulement par quelques rayons à peu près perpendiculaires à la surface de l'émulsion. Les traces semblent augmenter de longueur au fur et à mesure qu'elles s'éloignent du centre. Cela tient au fait que les traces éloignées sont presque parallèles à la surface de la gélatine tandis que les traces voisines du point d'émission s'enfoncent dans la gélatine et que l'observation se fait perpendiculairement à la surface.

Nous avons pu, assez rarement observer des grains qui, étant au contact même de l'émulsion ont donné des trajectoires souvent concourantes et partant d'une surface nettement définie (*fig.* 1 B). Des inclusions se présentant sous cet aspect ont été rencontrées

avec des roches pulvérisées (micaschiste de Quiberon, sable de La Trinité-sur-Mer), mais aussi avec un granite poli.





A B

Fig. 1 A et B. — Micaschiste.
Côte Sauvage. Quiberon (Morbihan).

De petits grains radioactifs séparés de la plaque photographique par une mince couche d'air donnent des trajectoires de particules α s'échappant en étoile d'une surface non impressionnée (*fig.* A). L'évaluation de la surface d'émission ne peut se faire que par extrapolation des directions des rayons. Elle ne peut donc être très précise.

Lorsque le grain est sur l'émultion même on obtient une étoile du type B. L'évaluation de la surface d'émission est beaucoup plus facile, mais ce cas ne se présente que très rarement.

Un fait rend compte de la difficulté d'obtenir de telles traces. Nous avons, en effet, impressionné six plaques avec le même échantillon de granite et, à chaque fois, avons repéré avec exactitude (à quelques microns près) la position des inclusions. Sur les six plaques, une seule donne aux trajectoires d'une petite inclusion l'aspect 1, les cinq autres donnent l'aspect 2 bien que l'échantillon ait été, pendant la pose, maintenu sur la plaque avec une pression de l'ordre de 1 kg : cm². Des travaux en cours avec des plaques pelliculables de la maison Kodak permettront peut-être d'éviter cet inconvénient.

Calcul de la concentration en matières radioactives de quelques petites inclusions. Influence de cette concentration sur l'absorption. — Pour évaluer la concentration de ces inclusions on se heurte à deux difficultés. On ignore généralement le rapport $\frac{C_{Th}}{C_U}$ des concentrations en thorium et en uranium et le nombre restreint des trajectoires ne permet pas de l'évaluer. D'autre part, on ne connaît pas le coefficient K' qui dépend de cette concentration.

En admettant le rapport $\frac{C_{Th}}{C_U} = 2{,}5$, les équations ne peuvent donner que le produit $C_U K' = \frac{N}{14{,}65}$, mais des calculs ou même des graphiques préliminaires donnent C_U en fonction de $C_U K'$.

Les résultats trouvés sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau. — *On admet* $\frac{C_{Th}}{C_U} = 2{,}5$.

Origine.	Temps de pose (jours).	Nombre de trajectoires.	Surface d'émission (en μ²).	*N*.	C_U (pour 100).	C_{Th} (pour 100).	Approximation (pour 100).
Sable granitique. La Trinité....	9	36	93	50	14	35	20
	9	10	50	26	7	18	20
	9	6	33	24	7	18	20
	9	15	240	8	2	5	50
Micaschiste. Quiberon..........	7	24	90	52	14	35	20
	18	51	63	52	14	35	20
	18	38	46	53	14	35	20

Pour les inclusions qui ont été séparées de la plaque par une mince couche d'air, il est encore souvent possible, en prolongeant les trajectoires les plus voisines de la source de déterminer approximativement le contour de celle-ci. On peut difficilement tenir compte des trajectoires éloignées en raison de la distorsion dans l'air. L'appréciation de la surface introduit une erreur assez grande. En ne mesurant que la projection de cette surface, on commet une erreur par défaut qui se trouve peut-être compensée par l'excès que donne la distorsion.

Nous donnons ci-après, à titre d'indication, quelques résultats obtenus avec des inclusions de ce genre (tableau p. 25).

2. **Étude de quelques larges inclusions.** — L'étude d'un échantillon de granite poli de Bretagne (Collection de M. Demay), puis par la suite d'un échantillon de granite poli de la région d'Angers, d'un granite de Lignole (Morbihan) et du micaschiste de Quiberon (non pas poli puisque la roche trop friable ne permet pas le polissage, mais seulement dressé),

Origine.	Temps de pose.	Nombre de trajectoires.	Surface d'émission (en μ^2).	N.	c_U (pour 100).	c_{Th} (pour 100).	Approximation (pour 100).
Granulite. Quiberon....	7 j	11	33	65	14	35	50
Micaschiste. Quiberon...	18	20	85	15	4,2	10,5	»
	18	7	15	22	7	17	»
	18	5	9	36	11	26	»
Granite de Bretagne....	340 h	20	32	50	13	33	»
	340	17	20	68	18	45	»

nous a prouvé, d'autre part, l'existence de très larges inclusions dont les dimensions sont parfois de l'ordre du millimètre et dont la radioactivité est assez forte [8].



Fig. 2. — Granite de Bretagne. Inclusion n° 3.

L'inclusion était séparée de la couche sensible par une mince pellicule d'air. Elle a émis des rayons α en étoile dont les longueurs apparentes augmentent avec la distance au centre. Il est pratiquement impossible de déterminer la surface d'émission (dessinée au centre). Au contraire, si l'inclusion est au contact de l'émulsion (voir *fig.* 5), les trajectoires sont groupées et l'on peut déterminer approximativement le contour du cristal radioactif.

La position de chacune de ces larges concentrations ayant été repérée avec soin sur l'échantillon de granite, l'examen optique de celui-ci nous a permis d'observer, à chaque fois, la présence d'un cristal brun-jaunâtre dont l'identification est en cours. En projetant sur le même écran, d'abord les traces des particules inscrites sur la plaque et ensuite le cristal qui semblait leur donner naissance, nous avons

constaté que ce dernier correspondait en forme, en grandeur et en orientation à l'ensemble des trajectoires observées (*fig.* 3 à 10)*. Cependant, nous avons



Fig. 3.

dû choisir parmi les plaques obtenues celles où l'inclusion se trouvait au contact de l'émulsion. La



Fig. 4.

remarque faite précédemment à propos des petites inclusions reste valable pour les grosses inclusions. Un cristal radioactif placé sur la couche sensible impressionne cette dernière approximativement selon son contour, mais si ce cristal est séparé de l'émulsion



Fig. 5.

par une mince couche d'air, la partie impressionnée s'élargit tout en gardant cependant à peu près la

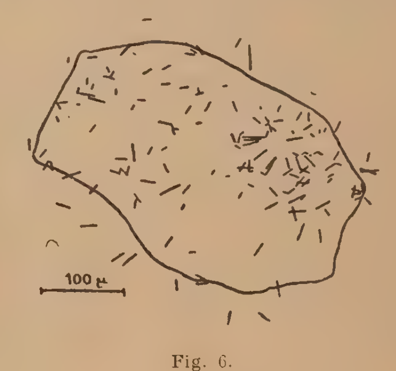


Fig. 6.

forme primitive. C'est ainsi que l'inclusion 1 donne toujours une tache en triangle, la pointe en bas et

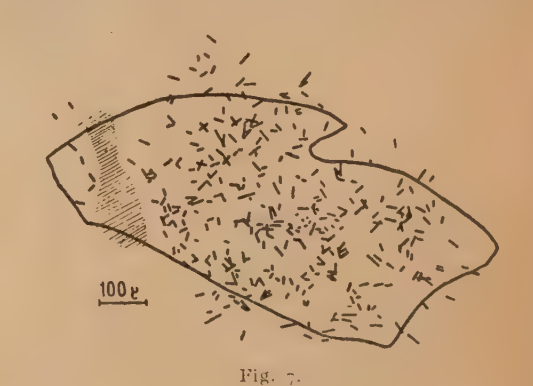


Fig. 7.

que l'inclusion 2 affecte toujours grossièrement une forme pentagonale.

Cependant, nous donnons (*fig.* 11 et 12) les traces données par une même inclusion, traces caracté-

* Figures obtenues en calquant sur un écran les traces des particules α inscrites sur une plaque et le contour du cristal qui semblait leur donner naissance. On voit que ce dernier correspond en forme, grandeur et orientation aux impressions de la plaque. Page suivante, les photographies des cristaux 1, 2 et 5. Les cristaux 1 et 2 sont jaunes et bruns et sont inclus dans du quartz. Le cristal 5 est d'un jaune plus clair et est noyé dans de la biotite.

ristiques et qui montrent bien la nécessité d'assurer le plus possible, le contact roche-émulsion. Nous

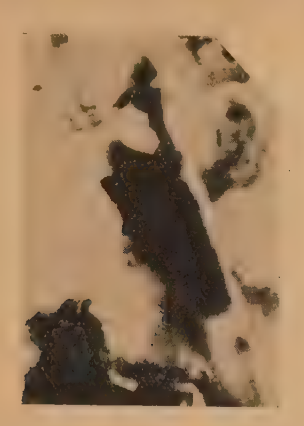


Fig. 8.
Cristal n° 1.



Fig. 9.
Cristal n° 2.

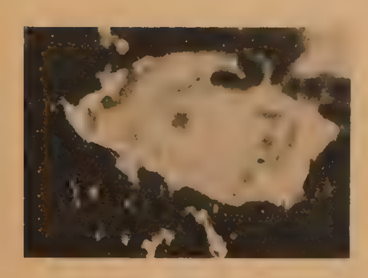


Fig. 10. — Granite de Bretagne.
Cristal n° 5.

avons pu facilement comparer les diverses traces données par une même inclusion en superposant convenablement sur la platine du microscope trois plaques impressionnées par le même échantillon de roche et en utilisant un objectif de faible grossissement. L'espace qui existe entre les plaques et l'objectif est assez grand pour permettre une mise au point successive sur les trois émulsions.



Fig. 11. — Inclusion n° 1. Granite de Bretagne.
Ensemble des traces des trajectoires données par l'inclusion n° 1.

On voit que la forme générale de l'impression correspond au contour du cristal (voir *fig.* 8) : triangle avec la pointe en bas et tournée vers la droite. On remarque également la pointe en haut et à droite et qui correspond très exactement au contour du cristal.

Il faut encore signaler que lorsque la roche est sur l'émulsion, on peut observer un assez grand nombre de trajectoires longues et, qu'au contraire, la roche séparée de l'émulsion par une mince couche d'air ne donne, au centre, que des traces plongeantes qui, avec un faible grossissement paraissent courtes et dont l'observation avec un fort grossissement devient délicate. On obtient généralement que quelques trajectoires à peu près parallèles à l'émulsion sur le

pourtour de la tache. Ceci à une grande importance pour la détermination du rapport $\frac{C_{Th}}{C_U}$.

Mesure du rapport $\frac{C_{Th}}{C_U}$. — Nous avons été frappés en examinant les traces des particules α données par les grosses inclusions de constater le nombre relativement grand des rayons du thorium C' (*fig.* 13). La mesure des longueurs des rayons α des concentrations les plus importantes nous a donné les résultats que nous indiquons dans le tableau suivant :

Origine.	Inclusion.	ν_1.	ν_2.	$\frac{\nu_2}{\nu_1}$.	$\frac{C_{Th}}{C_U}$.
Granite de Bretagne (Coll. M. Demay)..	1	12	8	0,65	∞
	1	11	11	1	16
	2	17	18	1	16
	2	65	61	0,94	24
	5	12	12	1	16
	5	11	9	0,82	160
Granite de la région d'Angers..........	1	16	16	1	16

Comme nous le faisions remarquer au début de cet exposé les résultats obtenus par cette méthode ne peuvent être très précis, mais ils montrent cependant que les cristaux examinés contiennent une forte proportion de thorium et peu d'uranium ou même rien que du thorium. C'est là, croyons-nous, un fait intéressant.

Les dimensions de cristaux et leur teneur en matières radioactives sont variables. Les mesures ont été faites en admettant qu'elles ne contiennent



Fig. 12. — Inclusion n° 1. Granite de Bretagne.
La forme générale de l'impression est encore celle d'un triangle la pointe en bas, mais elle s'est élargie et de nombreuses trajectoires sont en dehors du contour de l'inclusion radioactive parce que la plaque n'était pas en contact parfait avec la roche.

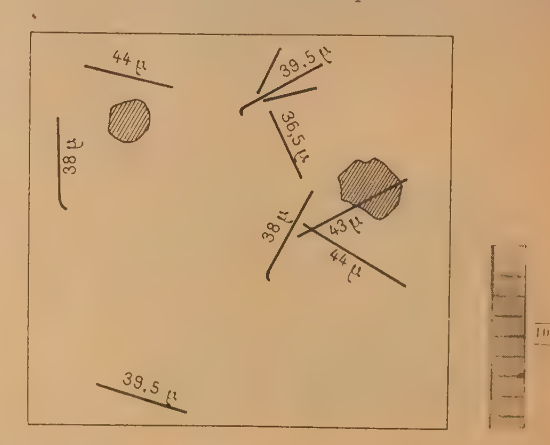


Fig. 13. — Inclusion n° 2. Granite de Bretagne.
Durée de la pose : 210 h.
On remarque un nombre relativement grand de trajectoires dépassant 38 µ, soit 7 cm d'air et dues par conséquent au thorium C'.
Pour permettre de repérer plus facilement ces trajectoires, nous reproduisons à côté le calque du cliché sur lequel nous avons indiqué les longueurs des parcours dans l'émulsion des traces les plus longues. Les mesures ont été faites au microscope avec un objectif à immersion à 1 µ près. Certaines traces ne paraissent peut-être pas avoir ces dimensions, mais c'est uniquement parce qu'elles s'enfoncent légèrement dans l'émulsion et ne peuvent être au point sur tout leur parcours.

que du thorium. Nous avons choisi pour K' la valeur $K' = 20$ qui correspond à peu près au coefficient d'absorption des zircons. Cette valeur ne sera précisée que lorsque l'analyse chimique des cristaux aura été faite.

Origine.	Inclusion.	N.	$C_{Th}.100$.	Surface (en μ^2).
Granite de Bretagne (Coll. M. Demay)..	1	0,43	1,3	16.10^4
	2	1,2	1,2	47
	3	0,31	0,94	1,5
	4	1,5	1,5	8
	5	0,15	0,45	27
Granite d'Angers....	1	0,33	1	-

On peut constater que la teneur en thorium de ces inclusions est toujours de l'ordre de 1 pour 100.

Un récent article de J. H. Poole et de J. W. Bremner paru dans *Nature*, vol. 163, n° 4134, p. 130 signale l'existence dans un granite de petits cristaux jaunes-bruns non identifiés (sans doute mélanite ou perovskite) souvent fortement radioactifs et qui semblent correspondre à la deuxième catégorie des inclusions que nous mentionnons.

Ces auteurs n'ont pas évalué le rapport $\frac{C_{Th}}{C_U}$ et, considérant la radioactivité due uniquement à l'uranium, ils évaluent la concentration à 0,3 pour 100 d'uranium, ce qui correspond très exactement à la valeur de 1 pour 100 de thorium que nous donnons.

RÉPARTITION DE LA RADIOACTIVITÉ A L'INTÉRIEUR DES CRISTAUX. — A l'intérieur des cristaux, la radioactivité n'est pas uniforme. Une simple observation des rayons émis par diverses inclusions (*fig.* 14 ABC et 15) montre que, souvent, ces rayons s'échappent en étoile de petites surfaces.

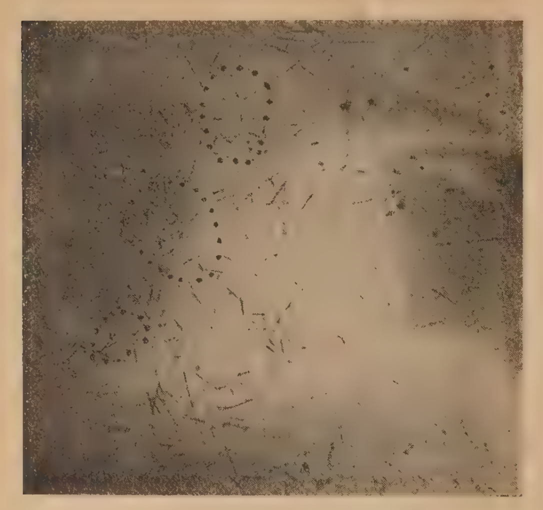


Fig. 14.
A. — Granite d'Angers. Inclusion n° 1. Pose 75 h.
B. — Granite de Bretagne. Inclusion n° 4. Pose 414 h.
C. — Granite de Bretagne. Inclusion n° 5.
On remarque que les trajectoires ne sont pas uniformément réparties. On distingue par endroits des agglomérations de rayons α qui semblent provenir de points voisins. S'agit-il de quelques atomes de thorium X voisins émettant des rayons α par filiation radioactive ou s'agit-il de grains radioactifs très petits ?

Très souvent 3, 4 ou 5 rayons semblent issus d'un même point. Il s'agit sans doute de filiations radioactives. En effet, la pose ayant duré au minimum 5 jours, si un atome de radiothorium émet une particule α en donnant du thorium X, on a de grandes chances d'obtenir l'émission de 5 rayons α, car, en plus de celui du radiothorium, nous aurons ceux des éléments à vie courte : thorium X (3,64 j), thoron (54,5 s), thorium A (0,14 s) et thorium C (60,5 mn) ou thorium C' (10^{-6} s). L'atome émetteur ne se trouvant généralement pas sur la plaque même, mais au-dessus, les rayons ne sont pas concourants, mais on trouve facilement l'origine par extrapolation des directions.

Parfois on peut remarquer un certain nombre de rayons plus grands que 5 (de 6 à 14) qui semblent s'échapper d'une petite surface. Il semble difficile de se rendre compte s'il s'agit de 2 ou 3 atomes de

thorium X voisins émettant des rayons par filiation ou s'il s'agit de grains radioactifs inclus.



A



B

Fig. 15.

Si la répartition de la radioactivité était uniforme à l'intérieur des cristaux, les trajectoires émises à peu près perpendiculairement à l'émulsion seraient réparties régulièrement.

Celles-ci se reconnaissent aisément sur la photographie : elles sont courtes et le défaut de mise au point sur toute la longueur leur donne l'aspect d'un éventail entr'ouvert. On voit que les traces de ce genre forment quelques groupes qui peuvent parfois être assez bien délimités. Sur la photographie A nous avons entouré les principaux groupes d'une ligne pointillée. Ils correspondent à des inclusions, véritables foyers radioactifs, contenues dans le cristal. Les trajectoires les plus longues semblent en général provenir de ces foyers ainsi que le montre le calque B qui représente le foyer central et les rayons qui paraissent s'en échapper.

En admettant cette dernière hypothèse, nous avons essayé de déterminer la concentration en thorium des grains qui émettraient le même nombre de rayons. Voici les résultats de deux mesures :

Granite de M. Demay. Cristal 4. — 12 trajectoires semblent s'échapper en 414 h d'une surface de 38 μ^2.

$N = 21$, $C_{\mathrm{Th}} \simeq 65$ pour 100 (approximation 50 pour 100).

Granite de M. Demay. Cristal 2. — 8 trajectoires semblent s'échapper en 414 h d'une surface de 23 μ^2.

$N = 24$, $C_{\mathrm{Th}} \simeq 70$ pour 100 (à 50 pour 100 près).

Plusieurs mesures du même genre ont donné des résultats analogues qui laissent supposer que les grains radioactifs inclus dans les cristaux ont, s'ils existent, une très forte teneur en thorium, teneur qui correspondrait à peu près à celle de la thorite.

3. **Étude de quelques inclusions moyennes à forte radioactivité.** — Nous devons encore signaler la présence d'un petit nombre d'inclusions ayant une surface de quelques centièmes de millimètres carrés et possédant une forte radioactivité [9].



Fig. 16. — Concentré du granite de Bretagne (coll. de M. Demay). Pose 3 jours.

Le nombre des trajectoires indique une très forte proportion de matière radioactive.

Nous les avons rencontrées :

1° dans le sable de Pénestin déjà signalé;

2° dans une concentration d'éléments lourds extraits par M. André Demay du granite de Bretagne dont nous avons étudié la radioactivité précédemment.

Le calcul du rapport des concentrations en thorium et en uranium a donné les résultats suivants :

Origine.	Inclusion.	Surface approximative (en mm²).	ν_1.	ν_2.	$\frac{C_{Th}}{C_U}$.
Sable de Pénestin (Plage des Demoiselles)	1	0,16	84	45	∞
	2	0,04	26	21	364
	3	0,04	16	11	∞
	4	0,02	19	15	∞
Éléments lourds. Granite de Bretagne (Coll. M. Demay)	1	0,03	32	30	24
	2	0,02	24	20	110
	3	0,005	12	12	16
	4	0,04	17	12	∞
	5	0,03	35	24	∞
	6	0,02	22	18	194

Ces résultats montrent que ces inclusions contiennent une très forte proportion de thorium et peu ou pas d'uranium. Pour évaluer la teneur en matière radioactive nous avons admis qu'elles ne contenaient que du thorium.



Fig. 17. — Concentrations d'éléments lourds du granite de Bretagne (coll. de M. Demay).
En 200 mn, 178 rayons α s'échappent d'une surface d'environ 0,025 mm², ce qui donne $C_{Th} \simeq 76$ pour 100.

Le calcul de cette teneur n'a pu se faire avec les plaques précédentes qui ont été obtenues avec des poses de plusieurs jours. En effet, le centre des traces des inclusions montre un fouillis inextricable de trajectoires (plusieurs milliers par champ de microscope) et toute numération est impossible.

Une pose relativement courte de 3 h 20 mn (soit 200 mn) nous a permis de trouver une trace donnant 178 trajectoires dans un champ de 0,025 mm² (*fig.* 16). Nous avons pu ainsi déterminer la concentration en thorium dans d'excellentes conditions. Cette teneur, évaluée à 10 ou 15 pour 100 près est de l'ordre de 76 pour 100.

Elle correspond, aux erreurs près, à celle de la thorite $Si\,O_2$, $Th\,O_2$.

Notons que ces inclusions sont extrêmement rares. Nous ne les avons observées que dans des concentrations (naturelle ou artificielle) d'éléments lourds des roches et nous ne les trouvons qu'en petites quantités (5 pour une surface de 4 cm² avec une concentration ayant une teneur en matières radioactives 50 fois plus forte environ que le granite dont elle est extraite).

Je me permets, à la fin de cet exposé, de remercier respectueusement Mme Joliot-Curie qui a inspiré ces recherches et dont les conseils m'ont été très précieux.

Mes remerciements vont également à M. le doyen Milon qui m'a autorisé à utiliser le matériel et les laboratoires de l'Institut de Géologie de Bretagne, à M. Demay, Professeur à l'École des Mines, qui m'a procuré un échantillon de granite très intéressant et à M. Rollando de Vannes qui a aimablement mis à ma disposition sa collection minéralogique.

Note ajoutée à la correction des épreuves.

Des travaux effectués depuis la rédaction de cet article permettent de préciser les points suivants :

1° Des inclusions du même genre que celles signalées au paragraphe 2 du chapitre sur la répartition de la radioactivité des roches ont été trouvées dans le granite d'Angers déjà mentionné et dans un granite de Locmalo (mhn). Certaines ont une surface de l'ordre de 1,5 mm² et leur teneur un thorium atteint 2,4 pour 100.

2° Des inclusions à forte radioactivité (§ 3) ont été décelées dans des granites polis (granite de Bretagne ou d'Angers). Des impressions obtenues avec des temps de pose différents (de 30 mn à quelques jours) ont permis d'opérer les mesures dans de bonnes conditions.

Nous avons reconnu les inclusions à thorium

signalées dans l'article précédent, mais aussi des inclusions à très forte teneur en uranium [1] (65 pour 100) et contenant quelques centièmes de thorium. Les dimensions de ces inclusions sont du même ordre que celles des précédentes.

3° Des inclusions contenant une faible proportion d'uranium [2] (quelques centièmes) inégalement réparti. Certains points de ces conclusions semblent avoir une teneur de 50 à 60 pour 100 d'uranium. Ces cristaux brisés par pulvérisation peuvent donner des grains ayant une activité inférieure ou supérieure à celle de l'ensemble.

En résumé, il nous semble possible de grouper toutes les inclusions observées dans les roches polies en quatre catégories :

a. Cristaux à forte teneur en uranium.

$C_U \simeq 70$ pour 100, $C_{Th} \simeq$ quelques centièmes,
Surface = quelques dizièmes de mm².

b. Cristaux à forte teneur en thorium.

$C_U \simeq 0$, $C_{Th} \simeq 70$ pour 100,
Surface = quelques dizièmes de mm².

c. Cristaux à faible teneur en uranium.

$C_U \simeq$ quelques centièmes, $C_{Th} \simeq 0$,
Surface = de quelques dizaines à quelques centaines de microns carrés.

d. Cristaux à faible teneur en thorium.

$C_U \simeq 0$, $C_{Th} \simeq 1$ ou 2 pour 100,
Surface = 1 à 2 mm².

Les cristaux à faible teneur en uranium ou en thorium n'ont pas une activité uniforme et la pulvérisation des roches peut mettre en évidence des inclusions très petites, ayant des teneurs variables et provenant sans doute de la dissociation des cristaux précédents.

[1] Coppens R., *C. R. Acad., Sc.*, 228, 1949.
[2] Coppens R., *C. R. Acad. Sc.*, 228, 1949.

Manuscrit reçu le 20 juin 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Farraggi et Albouy. — *C. R. Acad., Sc.* 1948, **226**, 717. — Coppens. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, 61. — Piccioto — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 173 et 247. — Faraggi et Albouy. — *J. Phys. Rad.*, avril 1949, **10**, 105.
[2] Coppens. — *J. Phys. Rad.*, février 1949, **10**.
[3] Curie Mme I. — *J. Phys. Rad.*, novembre 1946, **7**.
[4] Curie Mme. — *Radioactivité*, Hermann et Cie édit., 487.
[5] Evans. — *Phys. Rev.*, 1934, **45**, 38.
[6] Hée A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, 356; *Ann. de Géophysique*, décembre 1948, **4**, fasc. **3**, 242. — Piccioto. — *Univ. libre de Bruxelles*, non publié.
[7] Coppens R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 176.
[8] Coppens R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1218.
[9] Coppens R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 617.

LA SECTION EFFICACE DE DIFFUSION NUCLÉON-NUCLÉON DANS LA THÉORIE SUPER-MULTI-TEMPORELLE

Par MAURICE JEAN,
Laboratoire Curie, Institut du Radium

et JACQUES PRENTKI,
Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — On calcule la section efficace des collisions nucléon-nucléon en s'appuyant sur les nouvelles théories quantiques des champs de Tomonaga-Schwinger-Feynman-Dyson. La densité de l'hamiltonien utilisé pour l'équation généralisée de Schrödinger est déduite par la méthode de Tomonaga-Kanesawa et par celle de Matthews. Le calcul de la matrice S de Heisenberg est effectué par le formalisme de Schwinger ainsi que par celui de Dyson-Feynman. On admet que les mésons responsables des forces nucléaires sont de spin zéro. On a envisagé les différentes caractéristiques de charge des diverses théories. En seconde approximation on élimine le terme de contact dans l'hamiltonien, on réduit le couplage pseudovectoriel à un couplage pseudoscalaire et le vectoriel à un scalaire; les deux constantes d'interaction f_1 et f_2 sont ramenées, dans le cas pseudoscalaire, à une constante unique pour des processus réels du second ordre. On calcule de plus l'élément de matrice, dans l'espace des moments, du potentiel d'interaction entre deux nucléons.

Introduction. — Les théories récentes de Tomonaga [1], Schwinger [2], Feynman et Dyson [3] présentent l'Électrodynamique quantique sous une forme covariante du point de vue relativiste. Cette manière de la formuler a pour avantage essentiel de permettre une séparation covariante des termes responsables des divers effets de self-énergie, de diffusion, effet Compton, etc. Cette théorie quantique des champs peut être étendue sans grande difficulté, en particulier au champ mésique en interaction avec le champ de nucléons [4]. On peut espérer obtenir de cette façon une théorie des forces nucléaires plus satisfaisante du point de vue relativiste. Il faut toutefois insister sur le fait que le remplacement du champ photonique par le champ mésique crée une difficulté supplémentaire qu'on ne rencontrait pas en Électrodynamique quantique et qui est liée à l'intégrabilité du système d'équations propre à la théorie de Tomonaga-Schwinger. Il se trouve que la densité d'hamiltonien d'interaction $H(x)$, dans la représentation d'interaction, qu'on déduit du lagrangien par le formalisme habituel, ne peut être utilisé dans l'équation fonctionnelle de Tomonaga-Schwinger comme cela était possible en Électrodynamique quantique et ceci pour deux raisons : *a.* la condition d'intégrabilité, à savoir $[H(x), H(x')] = 0$ pour deux points quelconques d'une surface du genre espace σ n'est pas remplie et *b.* $H(x)$ n'est pas un invariant relativiste. Cela tient essentiellement à la présence, dans le lagrangien d'interaction entre les mésons et les nucléons de dérivées par rapport au temps des grandeurs du champ mésique. Cette difficulté n'est pas fondamentale, on peut l'éliminer soit par la méthode de Tomonaga-Kanesawa [5] utilisée par Miyamoto [4] qui consiste à ajouter à l'hamiltonien défectueux un terme qui permette de satisfaire à la commutabilité et qui le rende invariant, soit à la manière de Matthews [6] en redéfinissant l'hamiltonien et les moments conjugués d'une façon covariante. Ces deux procédés différents conduisent cependant au même résultat. Nous devons souligner que, outre ces difficultés propres aux champs mésiques on retombe sur le même problème qu'en Électrodynamique quantique à savoir que le calcul du commutateur de l'hamiltonien fait intervenir des symboles mathématiques non définis (produits de fonctions Δ et de leurs dérivées [7]). Cette remarque a d'ailleurs une portée plus générale, car les mêmes symboles se rencontrent dans la plupart des calculs basés sur une telle théorie des champs. Il semble que ce genre de difficultés pourrait être surmontée en introduisant les régulateurs de Pauli [8]. Nous adopterons le procédé qui s'est révélé fructueux en Électrodynamique quantique et nous appliquerons les règles de calcul ordinaire aux produits de fonctions Δ.

En raison des récentes expériences de Berkeley avec le cyclotron de 184 inches il est intéressant d'examiner les problèmes des collisions nucléon-nucléon d'une manière relativiste et il nous semble que les

nouvelles théories fournissent une possibilité de calcul très appropriée à ce genre de questions. Et comme on le verra dans ce qui suit, ce mode de calcul apporte des simplifications notables par rapport au traitement ordinaire des perturbations.

En ce qui concerne les forces nucléaires il semble maintenant bien admis que les mésons qui en sont responsables sont les mésons π. Les discussions qu'on trouve dans la littérature [9] tendent bien à prouver que le méson π à un spin entier. Dans cet article nous ne recherchons pas systématiquement un accord entre la théorie et les résultats expérimentaux mais nous voulons plutôt indiquer le calcul pour le phénomène envisagé. Pour cette raison, parmi les diverses possibilités de spin pour le méson nous choisirons le cas le plus simple du spin zéro. Pour illustrer la méthode nous considérons le champ pseudo-scalaire. Le champ scalaire se traite d'une manière analogue, mais conduit à des résultats différents. L'exemple du champ pseudo-scalaire a déjà été particulièrement discuté dans la littérature [10] et il nous permettra d'obtenir par une voie nouvelle des résultats importants récemment signalés.

En ce qui concerne le caractère de charge de la théorie mésique utilisée nous choisissons la théorie symétrique de Kemmer [11], pour plus de généralité. Mais comme on le verra, il est possible de passer aisément aux cas de la théorie chargée et de la théorie neutre.

Les calculs qui vont suivre sont basés sur l'approximation de Born, donc les résultats obtenus sont valables uniquement pour des énergies suffisamment grandes (¹). Nous nous bornons aux effets du second ordre par rapport aux constantes de couplage.

Nous donnerons pour commencer, au paragraphe 2, un bref rappel des traits essentiels de la théorie de Schwinger et de la méthode de Dyson-Feynman en insistant sur les points liés au calcul de la matrice S de Heisenberg à partir de laquelle nous trouverons la section efficace de diffusion dans le paragraphe 4. Le paragraphe 3 sera consacré à l'obtention de l'hamiltonien de couplage dans la représentation d'interaction par la méthode de Miyamoto et celle de Matthews. De plus, nous donnerons, dans le paragraphe 5, l'expression du potentiel d'interaction, dans l'espace des moments, obtenue par Van Hove [8] et déduite ici de l'hamiltonien du second ordre de la théorie de Schwinger.

2. **Généralités.** — Dans les nouvelles théories l'état du système est représenté par un vecteur d'état $\Psi[\sigma]$ qui est une fonctionnelle de la surface du genre espace σ et qui satisfait à l'équation généralisée de Schrödinger

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \mathcal{H}(x)\,\Psi[\sigma], \tag{1}$$

où $\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}$ est le symbole de la dérivation fonctionnelle au point x de la surface σ, $\mathcal{H}(x)$ est la densité d'hamiltonien d'interaction, dans la représentation où les équations du mouvement des grandeurs de champ sont celles des champs isolés (représentation d'interaction), ($x = x_1, x_2, x_3, x_4 = ix_0, = ict$). Le système infini d'équations (1) est intégrable à condition que

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0, \tag{2}$$

les points x et x' étant deux points de la surface σ (même adjacents).

On peut définir un opérateur unitaire $U[\sigma, \sigma_0]$ qui permet de passer d'un état $\Psi[\sigma_0]$ défini sur la surface σ_0 à un autre état $\Psi[\sigma]$ par la relation

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma, \sigma_0]\,\Psi[\sigma_0], \tag{3}$$

l'opérateur $U[\sigma, \sigma_0]$ obéit à une équation fonctionnelle analogue à (1) et doit satisfaire à la condition initiale $U[\sigma_0, \sigma_0] = 1$. En faisant tendre σ_0 vers $-\infty$ et σ vers $+\infty$ (respectivement passé et futur éloignés) on obtient un opérateur $U[+\infty, -\infty]$ qu'on appellera S et qui est l'opérateur invariant de collision de Schwinger. On aura donc

$$\Psi[+\infty] = S\,\Psi[-\infty]. \tag{4}$$

A partir de l'équation (1) satisfaite par $U[\sigma, \sigma_0]$ on peut déduire une forme intégrale pour l'opérateur S :

$$S = 1 - \frac{i}{\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(x)\,U[\sigma, -\infty]\,\mathrm{d}x$$

$$(\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4).$$

L'introduction d'une méthode de perturbation consiste à considérer comme solution de cette équation intégrale un développement [3] :

$$\begin{aligned} S = 1 &+ \left(\frac{-i}{\hbar c}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \\ &+ \left(\frac{-i}{\hbar c}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\sigma(x_1)} \mathcal{H}(x_1)\,\mathcal{H}(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (^2). \end{aligned} \tag{5}$$

On peut exprimer la matrice S sous une forme plus commode pour les applications [3] :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_n\, P[\mathcal{H}(x_1) \ldots \mathcal{H}(x_n)], \tag{6}$$

(¹) Quant à l'applicabilité de cette approximation pour les énergies de l'ordre de 100 MeV intéressantes du point de vue expérimental, *voir* [12].

(²) Pour le problème qui nous intéresse, et au second ordre près, il n'est pas nécessaire de tenir compte dans l'hamiltonien du terme de self énergie.

où le symbole P a la signification suivante : soient $x_1, \ldots, x_n$ des points appartenant respectivement aux surfaces $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, l'opération

$$P[\mathcal{H}(x_1)\ldots\mathcal{H}(x_n)]$$

signifie que le produit des opérateurs $\mathcal{H}$ doit être pris, en écrivant de droite à gauche, suivant la succession des surfaces σ dans le temps.

L'opérateur qui vient d'être défini n'est rien d'autre que la matrice S de Heisenberg. De celle-ci se déduisent les sections efficaces d'après des formules bien connues [13]. Dans le cas particulier de collisions de deux particules, on a

$$\mathrm{d}Q_{\text{coll}} = 4\pi^2 \frac{\vec{k}_2'^2\,|(k_1' k_2' \,|\, R_{k_1+k_2} \,|\, k_1 k_2)|^2}{\sqrt{|\vec{u}_1-\vec{u}_2|^2-|\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2|^2}\,|(\vec{u}_2'-\vec{u}_1')\,\vec{e}_2'|}\,\mathrm{d}\Omega, \qquad (7)$$

où k_1, k_2, k_1' et k_2' sont respectivement les quadrivecteurs énergie et impulsion réduites des particules incidentes et diffusées, $\vec{k}$ est le vecteur impulsion, $\vec{u}$ la vitesse des particules en unités c, $\vec{e}_2'$ est le vecteur unitaire de $\vec{k}_2'$ et $\mathrm{d}\Omega$ est l'angle solide dans la direction de $\vec{e}_2'$. La matrice R est définie par

$$R = S - 1 \qquad (8)$$

et l'élément de matrice qui figure dans (7) est donné par

$$(k_1' k_2' \,|\, R_{k_1+k_2} \,|\, k_1 k_2)\,\delta(k_1'+k_2'-k_1-k_2) = (k_1' k_2' \,|\, R \,|\, k_1 k_2). \qquad (9)$$

Le symbole $\delta(k)$ représente conventionnellement le produit $\delta(k_1)\,\delta(k_2)\,\delta(k_3)\,\delta(k_4)$.

3. Interaction du champ mésique avec les nucléons. — La densité du lagrangien total du champ mésique pseudo-scalaire interagissant avec le champ de nucléons a pour expression, dans le cadre de la théorie symétrique de Kemmer [14] :

$$L = -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right)^2 + \varkappa^2\psi^2\right\} - \frac{\hbar c}{i}\bar{\varphi}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa_N\right)\varphi + \mathbf{R}\psi + \mathbf{P}_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}, \qquad (10)$$

où les caractères gras représentent des vecteurs de l'espace des spins isotopiques, ψ est le champ mésique pseudo-scalaire, φ est le champ de nucléons

$$\mathbf{R} = f_1\bar{\varphi}\boldsymbol{\tau}\gamma_5\varphi \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_\mu = \frac{f_2}{\varkappa}\bar{\varphi}\boldsymbol{\tau}\gamma_5\gamma_\mu\varphi \qquad (11)$$

sont les sources, $\varkappa$ et $\varkappa_N$ sont respectivement les masses réduites des mésons π et des nucléons. (Dans ce qui suit, on supposera, à moins d'indication contraire, la masse du neutron égale à celle du proton.) f_1 et f_2 sont les constantes de couplage ayant la dimension d'une charge. Pour les sommations nous adoptons la convention d'Einstein avec $\mu = 1, \ldots, 4$. L'opérateur φ possède huit composantes qui se décomposent en deux groupes de quatre, l'un concernant les protons, l'autre les neutrons, sur lesquels opèrent les vecteurs de spin isotopique $\boldsymbol{\tau}$; $\bar{\varphi} = i\varphi^*\gamma_4$ est le spineur adjoint du spineur φ.

A partir du lagrangien (10) on déduit de la manière habituelle la densité d'hamiltonien

$$H = H_m + H_n + H_{mn},$$

où H_m est l'hamiltonien du champ mésique, H_n celui des nucléons et

$$H_{mn} = -\left(\mathbf{R}\psi + \vec{\mathbf{P}}\,\mathrm{grad}\,\psi + \mathbf{P}_0\pi\right) + \frac{1}{2}\mathbf{P}_0^2, \qquad (12)$$

où le moment conjugué, π, de ψ est défini par

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\psi}{\partial x_0}} = \frac{\partial\psi}{\partial x_0} + \mathbf{P}_0.$$

Le passage de la représentation de Heisenberg à la représentation d'interaction s'effectue par une transformation canonique bien connue. Les opérateurs de la représentation de Heisenberg se transforment en opérateurs correspondants de la représentation d'interaction exception faite de leurs dérivées par rapport au temps ce qui modifie l'expression de π à l'aide de ces grandeurs. Pour obtenir l'hamiltonien dans la nouvelle représentation il suffit de remarquer que les équations de mouvement des nouveaux opérateurs sont celles de la représentation de Heisenberg pour les champs isolés. Il est donc évident que le moment conjugué de ψ sera maintenant

$$\pi = \frac{\partial\psi}{\partial x_0},$$

ce qui permet d'écrire l'hamiltonien d'interaction transformé

$$H = -\mathbf{R}\psi - \mathbf{P}_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{P}_0^2. \qquad (13)$$

A partir des règles de commutation sur un hyperplan $t = \text{const.}$ entre les π et les ψ de la représentation de Heisenberg, on trouve les commutateurs entre les grandeurs de champs dans la représentation d'interaction pour deux points quelconques x et x'. De même pour les anticommutateurs liés au champ de nucléons. On a

$$\left.\begin{aligned}
&a. && [\psi_{\mathbf{i}}(x), \psi_{\mathbf{j}}(x')] = i\hbar c\,\delta_{\mathbf{ij}}\,D(x-x'),\\
&b. && \{\varphi_\alpha^A(x), \bar{\varphi}_\beta^B(x')\} = S_{\alpha\beta}(x-x')\,\delta_{AB},\\
&c. && [\psi(x), \varphi(x')] = \{\varphi_\alpha^A(x), \varphi_\beta^B(x')\}\\
& && \qquad = \{\varphi_\alpha^A(x), \bar{\varphi}_\beta^B(x')\} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

où $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ sont les indices des composantes des vecteurs de l'espace des spins isotopiques, α et β les indices des spineurs, A et B déterminent le caractère de charge des nucléons (indices des éléments des

matrices τ). $D(x-x')$ et $S(x-x')$ sont les fonctions invariantes généralisées de Jordan-Pauli pour le champ mésique et le champ de nucléons respectivement

L'hamiltonien (13) ne peut être utilisé dans l'équation (1) pour les raisons *a* et *b* mentionnées dans l'introduction. Suivant Tomonaga [5], nous ajoutons à (13) un terme $A_x[\sigma]$ tel que la nouvelle équation

$$i\hbar c \frac{\delta\Psi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \left\{ H(x) + A_x[\sigma] \right\} \Psi[\sigma] \qquad (15)$$

forme un système intégrable, $A_x[\sigma]$ étant une fonction du point x de la surface σ et une fonctionnelle de cette même surface. On exige de plus que $A_x[\sigma] = 0$ quand on ramène la surface σ à un hyperplan $t = \text{const.}$, c'est-à-dire que la nouvelle théorie redonne l'ancienne dans le cas des hyperplans $t = \text{const.}$ La condition d'intégrabilité de (15) est maintenant

$$\left[H(x) + A_x[\sigma] - i\hbar c \frac{\delta}{\delta\sigma(x)}, \; H(x') + A_{x'}[\sigma] - i\hbar c \frac{\delta}{\delta\sigma(x')} \right] = 0. \qquad (16)$$

En suivant de très près le calcul de Miyamoto [4] on est conduit à

$$A_x[\sigma] = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\mu \eta_\mu)^2 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_4^2,$$

où η_μ sont les composantes de la normale au point x de la surface σ. Le nouvel hamiltonien est donc

$$\mathcal{H}(x) = -\mathbf{R}\psi - \mathbf{P}_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\mu \eta_\mu)^2 \qquad (17)$$

qui est un invariant relativiste. Il faut remarquer que (17) dépend du point x de la surface σ, ainsi que de la normale à la surface en ce point.

Une autre méthode plus générale, en vue d'obtenir l'hamiltonien (17) est due à Matthews [6]. On redéfinit les opérateurs de la théorie habituelle, au sens de Weiss [15] en introduisant dès le début les surfaces σ. A partir du lagrangien (10) on définit le moment conjugué de ψ

$$\pi = -\frac{\partial L}{\partial \dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu}} \eta_\mu = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \mathbf{P}_\mu \right) \eta_\mu$$

et l'hamiltonien

$$H = T_{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu,$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie impulsion habituel. De la même façon que dans l'ancienne théorie, on éliminait les dérivées des grandeurs de champ par rapport au temps on élimine maintenant les dérivées des mêmes grandeurs suivant la normale à la surface σ à l'aide des moments conjugués et des dérivées tangentielles. L'hamiltonien d'interaction est ainsi

$$H_{mn} = -\mathbf{R}\psi - \mathbf{P}_\mu \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} \right)_{\text{tg}} + \mathbf{P}_\mu \eta_\mu \pi + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\mu \eta_\mu)^2.$$

La transformation canonique liée à la surface σ qui effectue le passage de la représentation de Heisenberg à la représentation d'interaction transforme les opérateurs de la surface σ en opérateurs correspondants, exception faite des dérivées normales. Les propriétés de la représentation d'interaction permettent de donner immédiatement l'expression des nouveaux π à l'aide des dérivées des nouveaux ψ. On aura

$$\pi = \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} \eta_\mu$$

de telle sorte que l'hamiltonien d'interaction devient

$$\mathcal{H}(x) = -\mathbf{R}\psi - \mathbf{P}_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\mu \eta_\mu)^2. \qquad (17)$$

On retrouve le résultat obtenu par la méthode de Tomonaga-Miyamoto. Ceci nous assure que l'hamiltonien obtenu par le formalisme de Matthews satisfait à la condition d'intégrabilité (16).

L'équation (1) avec $\mathcal{H}(x)$ donné par (17) est l'équation fondamentale à partir de laquelle nous calculerons la matrice S de Heisenberg.

4. Calcul de la section efficace [16]. — 1° Calcul de la matrice S de Heisenberg. — *a. Utilisation de l'hamiltonien du second ordre.* — Nous allons suivre ici la méthode indiquée par Schwinger dans le cas de l'Électrodynamique quantique pour évaluer l'hamiltonien responsable des effets du second ordre. L'évolution du système est décrite, dans la représentation d'interaction par l'équation

$$i\hbar c \frac{\delta\Psi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \left\{ -\mathbf{R}\psi - \mathbf{P}_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\mu \eta_\mu)^2 \right\} \Psi[\sigma], \quad (18)$$

où les grandeurs de champ obéissent aux relations

$$\left. \begin{aligned} &(\square - \varkappa^2)\psi = 0, \\ &\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa_N\right)\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \left(\bar{\gamma}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \varkappa_N\right)\bar{\varphi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18^a)$$

En première approximation, la solution de (18) est

$$\Psi[\sigma] \simeq \left[1 + \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\sigma} \left\{ \mathbf{R}'\psi' + \mathbf{P}'_\mu \frac{\partial\psi'}{\partial x'_\mu} \right\} dx' \right] \Psi^0, \quad (19)$$

où Ψ^0 est le vecteur d'état en l'absence d'interaction. $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$, etc. signifient $\mathbf{R}(x)$, $\mathbf{R}(x')$, etc. L'absence d'effets réels du premier ordre s'exprime par la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathbf{R}'\psi' + \mathbf{P}'_\mu \frac{\partial\psi'}{\partial x'_\mu} \right\} dx' = 0, \qquad (19^a)$$

de telle sorte que l'équation (19) peut s'écrire

$$\Psi[\sigma] \simeq \{ 1 - iG[\sigma] \} \Psi^0.$$

avec

$$G[\sigma] = -\frac{1}{2\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\mathbf{R}'\psi' + \mathbf{P}'_\mu \frac{\partial\psi'}{\partial x'_\mu}\right\}\varepsilon[\sigma\sigma']\,dx' \quad (20)$$

ou $\varepsilon[\sigma, \sigma'] = +1$ quand σ' précède σ dans le temps et est égal à -1 dans le cas contraire. Pour éliminer les effets du premier ordre de l'équation du mouvement on effectue une transformation unitaire

$$\Psi[\sigma] \rightarrow e^{iG[\sigma]}\Psi[\sigma].$$

Au second ordre près ([3]) la nouvelle équation du mouvement est alors

$$i\hbar c\frac{\delta\Psi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \left\{-\frac{i}{4\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathbf{R}\,\psi + \mathbf{P}_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}, \mathbf{R}'\psi' + \mathbf{P}'_\mu\frac{\partial\psi'}{\partial x'_\mu}\right]\varepsilon[\sigma,\sigma']\,dx' + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\mu\eta_\mu)^2\right\}\Psi[\sigma]. \quad (21)$$

Cette relation est obtenue en utilisant les formules

$$e^{iG[\sigma]}\frac{\delta}{\delta\sigma}e^{-iG[\sigma]} = -i\frac{\delta G[\sigma]}{\delta\sigma} + \frac{1}{2}\left[G[\sigma], \frac{\delta G[\sigma]}{\delta\sigma}\right] + \ldots,$$

$$e^{iG[\sigma]}A\,e^{-iG[\sigma]} = A + i\left[G[\sigma], A\right] + \ldots.$$

L'évaluation du commutateur intervenant dans l'équation (21) est élémentaire et conduit, par l'intermédiaire de (14.a), à

$$i\hbar c\frac{\delta\Psi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \left\{\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\{\mathbf{R}, \mathbf{R}'\}D(x-x') + \{\mathbf{R}, \mathbf{P}'_\mu\}\frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\mu} + \{\mathbf{P}_\mu, \mathbf{R}'\}\frac{\partial D(x-x')}{\partial x_\mu} + \{\mathbf{P}_\mu, \mathbf{P}'_\nu\}\frac{\partial^2 D(x-x')}{\partial x_\mu\,\partial x'_\nu}\right]\varepsilon(xx')\,dx'\right.$$
$$- \frac{i}{8\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[[\mathbf{R}, \mathbf{R}']\{\psi, \psi'\} + [\mathbf{R}, \mathbf{P}'_\mu]\left\{\psi, \frac{\partial\psi'}{\partial x'_\mu}\right\} + [\mathbf{P}_\mu, \mathbf{R}']\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}, \psi'\right\} + [\mathbf{P}_\mu, \mathbf{P}'_\nu]\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}, \frac{\partial\psi'}{\partial x'_\nu}\right\}\right]\varepsilon[\sigma\sigma']\,dx' \left. + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\mu\eta_\mu)^2\right\}\Psi[\sigma]. \quad (22)$$

Dans les expressions ci-dessus et dans celles qui suivront les produits scalaires dans l'espace des spins isotopiques doivent se comprendre de la façon suivante, par exemple :

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{R}'\} = \{R_m, R'_m\}$$

et

$$[\mathbf{R}, \mathbf{R}']\{\psi, \psi'\} = [R_m, R'_n]\{\psi_m, \psi'_n\}.$$

La transformation unitaire sur les vecteurs d'états a pour conséquence une modification des grandeurs de champ. On aura, par exemple,

$$\psi \rightarrow e^{iG}\psi\,e^{-iG} = \psi + i[G\psi] = \psi + \delta\psi.$$

Le $\delta\psi$ s'interprète comme le champ mésique induit par le champ de nucléons grâce au couplage du premier ordre. Le calcul de ce terme et des termes analogues pour les autres opérateurs s'effectue en explicitant les commutateurs par lesquels ils s'expriment en utilisant la formule (20) et les règles de commutation (14.a). On obtient

$$\left.\begin{aligned}
\delta\psi &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{R}'D(x-x') + \mathbf{P}'_\mu\frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\mu}\right)\varepsilon(xx')\,dx',\\
\delta\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{R}'\frac{\partial D(x-x')}{\partial x_\mu} + \mathbf{P}'_\nu\frac{\partial^2 D(x-x')}{\partial x_\mu\,\partial x'_\nu}\right)\varepsilon(xx')\,dx',\\
\delta\mathbf{R} &= \frac{i}{2\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathbf{R}, \mathbf{R}'\psi' + \mathbf{P}'_\mu\frac{\partial\psi'}{\partial x'_\mu}\right]\varepsilon[\sigma\sigma']\,dx',\\
\delta\mathbf{P}_\mu &= \frac{i}{2\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathbf{P}_\mu, \mathbf{R}'\psi' + \mathbf{P}'_\mu\frac{\partial\psi'}{\partial x'_\mu}\right]\varepsilon[\sigma\sigma']\,dx'.
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

En portant (23) dans (22), on a

$$i\hbar c\frac{\delta\Psi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \left\{-\frac{1}{4}\left(\{\mathbf{R}, \delta\psi\} + \left\{\mathbf{P}_\mu, \delta\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right\} + \{\delta\mathbf{R}, \psi\} + \left\{\delta\mathbf{P}_\mu, \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right\}\right) + \frac{1}{2}(\mathbf{P}_\mu\eta_\mu)^2\right\}\Psi[\sigma]. \quad (24)$$

En introduisant la notion d'opérateur à zéro, une ou deux particules comme le fait Schwinger, on peut écrire l'hamiltonien du second ordre sous la forme d'une somme de termes : H_{00} responsable de la « zero point energy » (énergie au point zéro), H_{01} self-énergie du méson, H_{10} self-énergie du nucléon, H_{11} effet Compton mésique, H_{20} diffusion non radiative de deux nucléons (collision élastique). C'est uniquement ce dernier que nous expliciterons. On remarque d'abord, d'après (23), que le 3[e] et le 4[e] terme du second membre de (24) font intervenir les commutateurs des sources $\mathbf{R}$ et $\mathbf{P}_\mu$. Le calcul direct de ces commutateurs à l'aide des règles (14 b) montre que l'on obtient des combinaisons bilinéaires des grandeurs de champ φ et $\bar{\varphi}$ donc des opérateurs au plus à une particule. Par conséquent, H_{20} est contenu entièrement dans les termes restant de

([3]) Un effet du $n^{\text{ème}}$ ordre fait intervenir les constantes de couplage par la combinaison $f_1^i f_2^k$ avec $i + k = n$.

l'hamiltonien de l'équation (24). Avant d'expliciter la forme de H_{20}, il convient de transformer les grandeurs $\delta\psi$ et $\delta \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}$ en vue d'obtenir des expressions plus maniables, ce qui a d'autant plus d'intérêt que les résultats qu'on déduit ne sont pas essentiellement liés à la notion d'opérateurs à deux particules. Les équations de mouvement (18 *a*) permettent de montrer que

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial x_\mu} = - g\mathbf{R} \qquad \text{avec} \quad g = 2\frac{\varkappa_N}{\varkappa}\frac{f_2}{f_1}. \tag{25}$$

On a donc en utilisant le théorème généralisé de Gauss :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}'_\mu \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\mu}\,\varepsilon(xx')\,\mathrm{d}x' &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\big(\mathbf{P}'_\mu D(x-x')\big)}{\partial x'_\mu}\,\varepsilon(xx')\,\mathrm{d}x' \\ &\quad + g\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}' D(x-x')\,\varepsilon(xx')\,\mathrm{d}x' \\ &= g\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}' D(x-x')\,\varepsilon(x-x')\,\mathrm{d}x' \\ &\quad + 2\int_\sigma \mathbf{P}'_\mu D(x-x')\,\mathrm{d}\sigma'_\mu,\end{aligned}$$

où $\mathrm{d}\sigma_\mu = \eta_\mu\,\mathrm{d}\sigma$. L'intégrale de surface est nulle en raison des propriétés de la fonction D sur une surface σ. De cette façon, on a

$$\delta\psi = (1+g)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}'\,\bar{D}(x-x')\,\mathrm{d}x'. \tag{26a}$$

D'une manière analogue, on peut écrire

$$\begin{aligned}\delta\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} &= (1+g)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}'\,\frac{\partial\bar{D}(x-x')}{\partial x_\mu}\,\mathrm{d}x' \\ &\quad - \int_\sigma \mathbf{P}'_\nu \frac{\partial D(x-x')}{\partial x_\mu}\,\mathrm{d}\sigma'_\nu\end{aligned} \tag{26b}$$

avec

$$\bar{D}(x) = -\frac{1}{2}D(x)\,\varepsilon(x).$$

On a utilisé la propriété $\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_\mu}D(x) = 0$. L'intégrale de surface dans (26 *b*) peut être transformée de la façon suivante. La dérivée $\frac{\partial D}{\partial x_\mu}$ se décompose en une dérivée tangentielle qui ne donne aucune contribution à l'intégrale et une dérivée normale $-\eta_\mu\eta_\lambda\frac{\partial D}{\partial x_\lambda}$. On aura donc

$$\begin{aligned}&-\int_\sigma \mathbf{P}'_\nu \frac{\partial D(x-x')}{\partial x_\mu}\,\mathrm{d}\sigma'_\nu \\ &= \int_\sigma \mathbf{P}'_\nu\,\eta'_\nu\,\eta'_\mu\,\eta'_\lambda \frac{\partial D(x'-x)}{\partial x'_\lambda}\,\mathrm{d}\sigma' = \eta_\mu\,\eta_\nu\,\mathbf{P}_\nu\end{aligned} \tag{27}$$

en tenant compte des propriétés d'antisymétrie de la fonction $D(x-x')$ ainsi que de

$$\int_\sigma f(x')\frac{\partial D(x'-x)}{\partial x'_\lambda}\,\mathrm{d}\sigma'_\lambda = f(x).$$

Les termes de (24) auxquels nous nous sommes intéressés se réduisent par l'intermédiaire de (26 *a*), (26 *b*) et (27), à

$$-\frac{1}{4}(1+g)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\{\mathbf{R},\mathbf{R}'\}\,\bar{D}(x-x') + \{\mathbf{P}_\mu,\mathbf{R}'\}\frac{\partial\bar{D}(x-x')}{\partial x_\mu}\right]\mathrm{d}x'.$$

Il est remarquable que, grâce au résultat (27), le terme de contact $(\mathbf{P}'_\mu\eta_\mu)^2$ a été éliminé de l'hamiltonien du second ordre.

En utilisant à nouveau la relation (25) et en précisant par l'indice 2 qu'on ne s'intéresse qu'aux opérateurs à deux particules, on obtient pour H_{20} l'expression

$$\begin{aligned}H_{20} &= -\frac{(1+g)^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\mathbf{R},\mathbf{R}'\}_2\,\bar{D}(x-x')\,\mathrm{d}x' \\ &\quad - \frac{1+g}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\mathbf{P}_\mu,\mathbf{R}'\}_2\,\bar{D}(x-x')\,\mathrm{d}x'.\end{aligned} \tag{28}$$

A partir de cet hamiltonien on peut calculer la matrice S au second ordre à l'aide de l'équation (5), il suffit de se borner aux deux premiers termes du développement [4]. Alors,

$$\begin{aligned}S &= 1 + \left(\frac{i}{\hbar c}\right)\frac{(1+g)^2}{4} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\,\{\mathbf{R},\mathbf{R}'\}_2\,\bar{D}(x-x').\end{aligned} \tag{29}$$

Le second terme de (28) disparaît ici en raison de la présence de la divergence sous le signe $\int$.

Lorsqu'on explicite l'anticommutateur qui figure dans (29) et qu'on s'intéresse uniquement aux opérateurs à deux particules, grâce aux relations (14 *b*) on trouve

$$\begin{aligned}S - 1 &= R \\ &= -\frac{i}{2\hbar c}f_3^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x' \\ &\quad \times \bar{\varphi}\bar{\varphi}'(\gamma_5\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}'\gamma'_5)\,\varphi\varphi'\,\bar{D}(x-x').\end{aligned} \tag{30}$$

les opérateurs γ_5, $\boldsymbol{\tau}$ opérant sur les φ et $\bar{\varphi}$ et γ'_5 et $\boldsymbol{\tau}'$ sur les φ' et $\bar{\varphi}'$. On a posé

$$f_3 = f_1 + 2f_2\frac{\varkappa_N}{\varkappa}. \tag{31}$$

(4) On peut justifier ce procédé d'une manière plus rigoureuse en effectuant une transformation unitaire sur les vecteurs d'état qui permet d'obtenir une nouvelle équation d'évolution de $\Psi[\sigma]$ uniquement sous l'influence de H_{20}. Toujours au second ordre près la signification physique des opérateurs de champ qu'on rencontre *dans* H_{20} reste inchangée.

b. Méthode de Dyson. — Pour le problème qui nous intéresse la matrice S s'écrit (6) au second ordre près :

$$S - 1 = -\frac{i}{\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbf{R}\psi + \mathbf{P}_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right) dx$$

$$-\frac{i}{2\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathbf{P}_\mu \eta_\mu)^2\, dx$$

$$+\left(\frac{i}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'$$

$$\times P\left(\mathbf{R}\psi + \mathbf{P}_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}, \mathbf{R}'\psi' + \mathbf{P}'_\mu \frac{\partial\psi'}{\partial x'_\mu}\right).$$

L'absence d'effets réels du premier ordre annule, d'après (19 a), le second terme du développement. Il reste à considérer le terme en $(\mathbf{P}'_\mu \eta_\mu)^2$ et l'intégrale double qui s'écrit à l'aide de (25)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, P(\ldots$$

$$= (1+g)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, P(\mathbf{R}\psi, \mathbf{R}'\psi') \qquad \{\,\mathrm{I}\,\}$$

$$+ (1+g)\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'$$

$$\times\left[P\left(\mathbf{R}\psi, \frac{\partial \mathbf{P}'_\mu \psi'}{\partial x'_\mu}\right) + P\left(\frac{\partial \mathbf{P}_\mu \psi}{\partial x_\mu}, \mathbf{R}'\psi'\right)\right] \qquad \{\,\mathrm{II}\,\}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, P\left(\frac{\partial \mathbf{P}_\mu \psi}{\partial x_\mu}, \frac{\partial \mathbf{P}'_\mu \psi'}{\partial x'_\mu}\right). \qquad \{\,\mathrm{III}\,\}$$

Nous allons montrer qu'une partie de $\{\,\mathrm{III}\,\}$ compense le terme d'interaction directe et que $\{\,\mathrm{II}\,\}$ ainsi que les termes restants de $\{\,\mathrm{III}\,\}$ sont des opérateurs à une particule au plus. En utilisant la définition des opérations P et le théorème de Gauss généralisé, on arrive à

$$\{\,\mathrm{II}\,\} = 2(1+g)\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_\sigma [\mathbf{R}\psi, \overbrace{\mathbf{P}'_\mu \psi'}]\, d\sigma'_\mu,$$

mais

$$[\mathbf{R}\psi, \mathbf{P}'_\mu \psi'] = \frac{1}{2}\{\mathbf{R}, \mathbf{P}'_\mu\}[\psi, \psi'] + \frac{1}{2}[\mathbf{R}, \mathbf{P}'_\mu]\{\psi, \psi'\}.$$

Les points x et x' appartenant à la même surface σ, le premier terme est nul d'après (14 a), le second représente un opérateur à une particule au plus. Donc pour les collisions $\{\,\mathrm{II}\,\} = 0$.

Les mêmes transformations effectuées sur $\{\,\mathrm{III}\,\}$, toujours en négligeant les termes au plus à une particule, donnent

$$\{\,\mathrm{III}\,\} = \frac{i\hbar c}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(D(x - x')\, \mathbf{P}_\mu, P_\nu\right) d\sigma'_\nu.$$

Avec la même remarque qu'à propos de la démonstration de la formule (27), on trouve

$$\left(\frac{i}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{2}\{\,\mathrm{III}\,\} = \frac{i}{2\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathbf{P}_\mu \eta_\mu)^2\, dx. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons donc retrouvé les propriétés remarquables que nous avons soulignées précédemment, à savoir l'élimination du terme d'interaction directe $(\mathbf{P}_\mu \eta_\mu)^2$. Puisque la matrice S, pour les processus envisagés, est donnée uniquement par $\{\,\mathrm{I}\,\}$, le terme de couplage pseudo-vectoriel a été ramené à un couplage pseudo-scalaire et les constantes d'interaction n'apparaissent que par la combinaison (31).

Nous transformerons maintenant le terme $\{\,\mathrm{I}\,\}$. En raison de la commutation de ψ avec $\mathbf{R}$, on a

$$P(\mathbf{R}\psi, \mathbf{R}'\psi') = P(\mathbf{R}\mathbf{R}')\, P(\psi\psi').$$

Le problème de diffusion ne fait pas intervenir de mésons réels, les grandeurs concernant ces particules doivent être remplacées par leur valeur moyenne sur le vide de méson, en particulier

$$P(\psi_i, \psi_j) \to \langle P(\psi_i \psi_j)\rangle_{\text{vide}} = \frac{1}{2}\hbar c\, \delta_{ij} D_F(x - x'),$$

où D_F est la fonction de Feynman pour le champ mésique : la matrice S est alors

$$S - 1 = R = -\frac{(1+g)^2}{4\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'$$

$$\langle P(\mathbf{R}, \mathbf{R}')\, D_F(x - x').$$

En explicitant les opérateurs $\mathbf{R}$ en utilisant les relations (14 b, c), tenant compte uniquement des opérateurs à deux particules, on trouve que la matrice R pour le problème de diffusion envisagé a pour expression

$$R = -\frac{f_3^2}{4\hbar c}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx'$$

$$\times \bar{\varphi}\bar{\varphi}'(\gamma_5 \tau, \gamma'_5 \tau')\, \varphi\varphi'\, D_F(x - x'). \qquad (32)$$

Comme nous le verrons en passant dans l'espace des moments les deux formes (30) et (32) sont strictement équivalentes.

2° Éléments de matrice de S. — Nous nous intéressons à la transition du système de deux nucléons d'un état initial, caractérisé par les moments k_1 et k_2 des deux particules et leurs énergies ε_1 et $\varepsilon_2\left(\varepsilon = \sqrt{k^2 + \varkappa_N'^2} = k_0\right)$, à l'état final défini par k'_1, k'_2, ε'_1 et ε'_2. La fonction D_F de Feynman a pour expression

$$D_F(x - x') = \frac{1}{4\pi^3}\int e^{-ik(x-x')}\, \delta_+(k^2 + \varkappa^2)\, dk, \qquad (33)$$

le symbole $kx = k_\mu x_\mu$ et $dk = d^4k$, la fonction δ_+ est la fonction introduite par Heisenberg. Nous nous limiterons à l'approximation de Born et, par conséquent, nous utiliserons des ondes planes pour les nucléons. On posera

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} a(k)\, u(k)\, e^{ikx}, \\ \bar{\varphi}(x) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} a^*(k)\, \bar{u}(k)\, e^{-ikx}. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

où $a(k)$ et $a^*(k)$ sont respectivement les opérateurs d'absorption et d'émission des nucléons et $u(k)$ les amplitudes des solutions des équations de Dirac (18*a*). On doit remarquer que l'opérateur $\varphi(x)$, par exemple, peut être responsable soit de l'absorption de la particule k_1, soit de celle de la particule k_2. On épuisera toutes les possibilités d'attribution des opérateurs aux nucléons à l'aide du tableau suivant :

Tableau I.

	$\varphi(x')$ Absorption.	$\bar{\varphi}(x')$ Émission.	$\varphi(x)$ Absorption.	$\bar{\varphi}(x)$ Émission.
I....	k_2	k'_2	k_1	k'_1
II....	k_1	k'_1	k_2	k'_2
III....	k_1	k'_2	k_2	k'_1
IV....	k_2	k'_1	k_1	k'_2

La contribution à l'élément de matrice de (32) des termes provenant de I en utilisant (33) et (34) ainsi que $\int e^{ikx}\,dx = (2\pi)^4\,\delta(k)$ est

$$\frac{+f_3^2}{4\pi\hbar c}\Big\{ a^*(k'_1)\,a^*(k'_2)\,a(k_1)\,a(k_2)$$
$$\times\,\bar{u}(k'_1)\gamma_5\tau\,u(k_1)\,\bar{u}(k'_2)\gamma_5\tau\,u(k_2)\Big\}$$
$$\times\int \delta_+(k_2+\varkappa^2)\,\delta(k_1-k'_1-k)\,\delta(k_2-k'_2+k)\,dk$$
$$=\frac{+f_3^2}{4\pi\hbar c}\{\ldots\}\,\delta_+[(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2]\,\delta(k_1+k_2-k'_1-k'_2).$$

Si l'on tient compte du fait facile à montrer que $(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2$ est toujours positif (les quadrivecteurs k sont du genre temps et ont même longueur), la fonction

$$\delta_+[(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2] = \frac{1}{2\pi i[(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2]} + \frac{1}{2}\,\delta[(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2]$$

peut être remplacée par

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{[(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2]}.$$

Dans ces conditions, le terme que nous calculons devient

$$\frac{-if_3^2}{2(2\pi)^2\hbar c}\,a^*(k'_1)\,a^*(k'_2)\,a(k_1)\,a(k_2)$$
$$\times\,\frac{\bar{u}(k'_1)\gamma_5\tau\,u(k_1)\,u(k'_2)\gamma_5\tau\,u(k_2)}{(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2}\,\delta(k_1+k_2-k'_1-k'_2).$$

Les contributions des effets II, III et IV se calculent d'une manière analogue. Le résultat global est

$$R = \frac{-if_3^2}{(2\pi)^2\hbar c}\left\{\frac{u(k'_1)\gamma_5\tau\,u(k_1)\,\bar{u}(k'_2)\gamma_5\tau\,u(k_2)}{(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2} - \frac{\bar{u}(k'_1)\gamma_5\tau\,u(k_2)\,\bar{u}(k'_2)\gamma_5\tau\,u(k_1)}{(k_1-k'_2)^2+\varkappa^2}\right\}$$
$$\times\,a^*(k'_1)\,a^*(k'_2)\,a(k_1)\,a(k_2)\,\delta(k_1+k_2-k'_1-k'_2). \quad (35)$$

Grâce à la propriété de $\delta_+[(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2]$ que nous avons utilisée pour déduire (35), on voit immédiatement qu'on serait conduit au même résultat à partir de (30) et de l'expression de la fonction D :

$$\bar{D}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ikx}}{k^2+\varkappa^2}\,dk. \quad (36)$$

Dans (35), figurent des produits scalaires dans l'espace des spins isotopiques, ce qui permet d'écrire les éléments de matrice de l'opérateur $R_{k_1+k_2}$, défini par (9), pour les deux types distincts de collisions, à savoir : neutron-neutron $(n-n)$ et proton-proton $(p-p)$ d'une part, et neutron-proton $(n-p)$ d'autre part, sous la forme condensée

$$\langle R_{k_1+k_2}\rangle = \frac{-if_3^2}{(2\pi)^2\hbar c}$$
$$\times\left\{a\,\frac{\bar{u}(k'_1)\gamma_5\,u(k_1)\,\bar{u}(k'_2)\gamma_5\,u(k_2)}{(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2} - b\,\frac{\bar{u}(k'_1)\gamma_5\,u(k_2)\,\bar{u}(k'_2)\gamma_5\,u(k_1)}{(k_1-k'_2)^2+\varkappa^2}\right\}, \quad (37)$$

où $a=b=1$ pour les collisions $n-n$ et $p-p$ et $a=-1$, $b=2$ pour les collisions $n-p$, dans la théorie symétrique. On peut remarquer tout de suite que dans la théorie neutre où intervient, seule, la composante τ_3 du vecteur des spins isotopiques, on a $a=b=1$ pour les chocs $p-p$ et $n-n$ et $a=-1$, $b=0$ pour les chocs $n-p$. Par contre, dans la théorie chargée où jouent seulement les composantes τ_1 et τ_2 on aura $a=b=0$ pour la diffusion $n-n$ ou $p-p$ et $a=0$, $b=2$ pour la diffusion $n-p$.

3° Section efficace. — Pour évaluer la section efficace d'après les formules (7) et (37), il faut sommer le carré du module de $<R_{K_1\,K_2}>$ sur les spins finaux des deux particules et faire la moyenne

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\left(\frac{f_3^2}{\hbar c}\right)^2\frac{\left|\vec{k}'_2\right|^2}{\left|\left(\varepsilon'_2\vec{k}'_1-\varepsilon'_1\vec{k}'_2\right)\vec{e}'_2\right|\sqrt{\left|\varepsilon_2\vec{k}_1-\varepsilon_1\vec{k}_2\right|^2-\left|\varepsilon_2\vec{k}_1\wedge\varepsilon_1\vec{k}_2\right|^2}}$$
$$\times\left\{\frac{\left[\left(\vec{k}'_2,\vec{k}_2\right)-\varepsilon'_2\varepsilon_2+\varkappa_N^2\right]\left[\left(\vec{k}'_1,\vec{k}_1\right)-\varepsilon'_1\varepsilon_1+\varkappa_N^2\right]}{[(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2]^2}\,a^2\right.$$
$$+\frac{\left[\left(\vec{k}'_2,\vec{k}_1\right)-\varepsilon'_2\varepsilon_1+\varkappa_N^2\right]\left[\left(\vec{k}'_1,\vec{k}_2\right)-\varepsilon'_1\varepsilon_2+\varkappa_N^2\right]}{[(k_1-k'_2)^2+\varkappa^2]^2}\,b^2+\frac{ab}{2}\,\frac{1}{[(k_1-k'_1)^2+\varkappa^2][(k_1-k'_2)^2+\varkappa^2]}$$
$$\times\Big(\left(\vec{k}_2,\vec{k}'_2\right)\left(\vec{k}_1,\vec{k}'_1\right)-\left(\vec{k}_2\wedge\vec{k}'_2\right)\left(\vec{k}_1\wedge\vec{k}'_1\right)+(\varkappa_N^2-\varepsilon_2\varepsilon'_2)\left(\vec{k}_1,\vec{k}'_1\right)$$
$$+(\varkappa_N^2-\varepsilon_1\varepsilon'_1)\left(\vec{k}_2,\vec{k}'_2\right)+\varkappa_N^2[(\varepsilon'_2-\varepsilon_2)(\varepsilon'_1-\varepsilon_1)-\varepsilon_2\varepsilon'_2-\varepsilon_1\varepsilon'_1]-\varkappa_N^2\left(\vec{k}_2-\vec{k}'_2,\vec{k}_1-\vec{k}'_1\right)$$
$$\left.+\left(\varepsilon'_2\vec{k}_2-\varepsilon_2\vec{k}'_2,\varepsilon'_1\vec{k}_1-\varepsilon_1\vec{k}'_1\right)+\varkappa_N^4+\varepsilon_1\varepsilon'_1\varepsilon_2\varepsilon'_2\Big)\right\}d\Omega. \quad (38)$$

sur leurs spins initiaux. En utilisant la méthode des traces de Casimir, on trouve, sans grande difficulté, la section efficace différentielle de collision nucléon-nucléon dans un système de référence quelconque.

Dans le système du centre de gravité où $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ et $\vec{k}'_1 = -\vec{k}'_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, la formule (38) prend une forme particulièrement simple :

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{f_3^2}{\hbar c}\right]^2 \frac{k^4}{\varepsilon^2}\left\{a^2\left[\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\varkappa^2}\right]^2 + b^2\left[\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{4k^2\cos^2\frac{\theta}{2}+\varkappa^2}\right]^2 + ab\,\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{\left(4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\varkappa^2\right)\left(4k^2\cos^2\frac{\theta}{2}+\varkappa^2\right)}\right\}\mathrm{d}\Omega, \tag{39}$$

ici k^2 représente le carré du module du vecteur impulsion $k^2 = \sqrt{\varepsilon^2 - \varkappa_N^2}$, l'angle θ est l'angle de diffusion, en particulier dans le cas du choc $n-p$, c'est l'angle entre le neutron incident et le neutron diffusé.

La section efficace totale est

$$Q = \frac{1}{32\pi}\left(\frac{f_3}{\hbar c}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^2} \times\left\{(a^2+b^2)\left[\frac{4(2k^2+\varkappa^2)}{4k^2+\varkappa^2} + \frac{\varkappa^2}{k^2}\ln\frac{\varkappa^2}{4k^2+\varkappa^2}\right] + ab\left[2 + \frac{\varkappa^2(4k^2+\varkappa^2)}{2k^2(2k^2+\varkappa^2)}\ln\frac{\varkappa^2}{4k^2+\varkappa^2}\right]\right\}. \tag{40}$$

Pour la commodité, nous rassemblons les valeurs particulières des coefficients a et b pour les différentes théories dans le tableau ci-dessous :

TABLEAU II.

	Collisions n-n ou p-p.		Collisions n-p.	
Théorie symétrique....	$a = 1$	$b = 1$	$a = -1$	$b = 2$
» chargée.......	$a = 0$	$b = 0$	$a = 0$	$b = 2$
» neutre........	$a = 1$	$b = 1$	$a = -1$	$b = 0$

4° CAS DU CHAMP SCALAIRE. — Lorsqu'on néglige la différence des masses du neutron et du proton ce problème est en tous points analogue au précédent, la seule différence résidant dans la définition des sources. On a

$$\mathbf{N} = g_1\bar{\varphi}\tau\varphi \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_\mu = \frac{g_2}{\varkappa}\bar{\varphi}\tau\gamma_\mu\varphi.$$

Au lieu de la relation (25), on a alors

$$\frac{\partial \mathbf{M}_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{41}$$

On élimine le terme de couplage vectoriel et le terme d'interaction directe $(\mathbf{M}_\mu\eta_\mu)^2$ par des considérations semblables à celles des sections 1° a et b de ce paragraphe. En raison de (41), la section efficace ne dépend que de la constante g_1.

La matrice R a la forme (35) où l'on remplace γ_5 par la matrice unité et f_3 par g_1. L'évaluation des traces montre que la section efficace différentielle dans un système de référence quelconque s'exprime par la formule (38) dans laquelle on a changé les signes de k'_1, k'_2, ε'_1 et ε'_2 dans les numérateurs. Dans le cas du système du centre de gravité, on trouve

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{g^2}{\hbar c}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^2}\left\{a^2\left[\frac{k^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\varkappa_N^2}{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\varkappa^2}\right]^2 + b^2\left[\frac{k^2\cos^2\frac{\theta}{2}+\varkappa_N^2}{4k^2\cos^2\frac{\theta}{2}+\varkappa^2}\right]^2 + ab\,\frac{\left(k^4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \varepsilon^2\varkappa_N^2\right)}{\left(4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\varkappa^2\right)\left(4k^2\cos^2\frac{\theta}{2}+\varkappa^2\right)}\right\}\mathrm{d}\Omega, \tag{42}$$

les coefficients a et b sont encore donnés par le tableau II.

Nous signalons cependant que, contrairement au cas du méson pseudo-scalaire, il n'est pas tout à fait justifié de négliger ici la différence des masses du neutron et du proton. En effet, pour le champ pseudo-scalaire

$$\frac{\partial P_{\mu 1}}{\partial x_\mu} = -\frac{f_2}{\varkappa}(\varkappa_n + \varkappa_p)\bar{\varphi}\gamma_5\tau_1\varphi - \frac{f_2}{\varkappa}(\varkappa_n - \varkappa_p)\bar{\varphi}\gamma_5\varphi\delta_{13} \tag{25a}$$

et puisque $\varkappa_n - \varkappa_p \ll \varkappa_n + \varkappa_p \approx 2\varkappa_N$ on peut toujours négliger le terme en $\varkappa_n - \varkappa_p$ de l'expression ci-dessus. Par contre, dans le cas du champ scalaire

$$\frac{\partial \mathbf{M}_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{g_2}{2\varkappa}(\varkappa_n - \varkappa_p)\bar{\varphi}(\tau_3\tau - \tau\tau_3)\varphi. \tag{41 a}$$

On voit donc que si $g_1 \ll g_2$ le terme provenant de la différence des masses des nucléons peut jouer un rôle prépondérant. Le point délicat correspond à la

valeur $g_1 \approx \frac{g^2}{\varkappa}(\varkappa_n - \varkappa_p)$ car alors on ne peut, en général, ramener les deux constantes distinctes d'interaction g_1 et g_2 à une constante unique g_3. La transformation du terme de couplage vectoriel semble ainsi moins avantageuse que celle qui y correspond dans le cas pseudo-scalaire.

5. **Potentiel d'interaction entre deux nucléons.** — Dans les anciennes méthodes de perturbation, on s'intéresse plus particulièrement à l'hamiltonien total qu'aux densités. A partir de cet hamiltonien, on peut entre autres, évaluer le potentiel d'interaction entre deux particules. Nous pouvons déduire l'élément de matrice, dans l'espace des moments, de ce potentiel en utilisant le terme H_{20} (28) responsable des interactions entre deux nucléons [5].

L'énergie d'interaction est

$$\mathcal{H}_{20} = \int \mathcal{H}_{20}(x)\,\mathrm{d}\vec{x}, \tag{43}$$

où la sommation porte sur les coordonnées d'espaces. Nous nous intéressons à la transition de l'état caractérisé par k_1, k_2 à l'état k'_1, k'_2. Le calcul de (43) présente une grande analogie avec celui de la matrice S. On utilise les expressions (28), (34), (36), on doit sommer d'abord sur $\mathrm{d}x'$, puis sur $\mathrm{d}k$ et enfin sur $\mathrm{d}\vec{x}$. Il faut noter cependant une différence essentielle par rapport à l'évaluation de l'élément de matrice de S, qui provient de ce qu'on somme sur $\mathrm{d}\vec{x}$ au lieu de $\mathrm{d}x$ et qu'alors le second terme du membre de droite de (28) ne disparaît pas entièrement lorsqu'il n'y a pas conservation de l'énergie. On déduit alors, dans le système du centre de gravité,

$$\begin{aligned}\langle k'_1 k'_2 | \mathcal{H}_{20} | k_1 k_2 \rangle &= \Big\{ - f_3^2 \frac{u^*(k'_1)\,u^*(k'_2)\,\rho_2^{(1)}\,\tau^{(1)}\tau^{(2)}\rho_2^{(2)}\,u(k_1)\,u(k_2)}{\varepsilon^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)^2} \\ &\quad + i\,\frac{f_2 f_3}{\varkappa}\,\frac{u^*(k'_1)\,u^*(k'_2)\,[\rho_1^{(1)}\rho_2^{(2)} + \rho_2^{(1)}\rho_1^{(2)}]\,\tau^{(1)}\tau^{(2)}\,u(k_1)\,u(k_2)}{\varepsilon^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)^2}\,[\varepsilon_1 - \varepsilon'_1]\Big\}\,(2\pi)^3\,\delta\big(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}'_1 - \vec{k}'_2\big)\,e^{2i(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)x_0},\end{aligned} \tag{44}$$

où $\varepsilon = \sqrt{\varkappa^2 + (\vec{k}_1 - \vec{k}'_1)^2}$ et où ρ sont les matrices de Dirac.

Le premier terme de (44) décrit les effets réels du second ordre tandis que le deuxième correspond à des effets virtuels du même ordre. Nous remarquons donc que l'élimination complète du couplage pseudo-vectoriel que nous avons effectuée est uniquement valable pour les processus réels du second ordre et que ce couplage peut réapparaître dans des processus d'ordre supérieur. Il faut alors bien préciser que le remplacement des deux constantes f_1 et f_2 par une constante unique f_3 n'est justifié qu'au second ordre près, comme on a pu le voir dans le cas de la diffusion.

6. **Discussion et conclusions.** — La région de 90 MeV est particulièrement intéressante en raison des expériences de Berkeley [16] sur la diffusion neutron-proton. On arrive maintenant à déterminer, non seulement les sections efficaces totales, mais aussi les distributions angulaires. Ces dernières offrent un critère très sûr pour la vérification des différentes théories de forces nucléaires. Nous avons donc examiné les distributions angulaires pour cette énergie dans le cas des collisions neutron-proton lorsque le méson responsable des interactions possède le spin zéro. Les résultats sont présentés dans les figures 1 et 2.

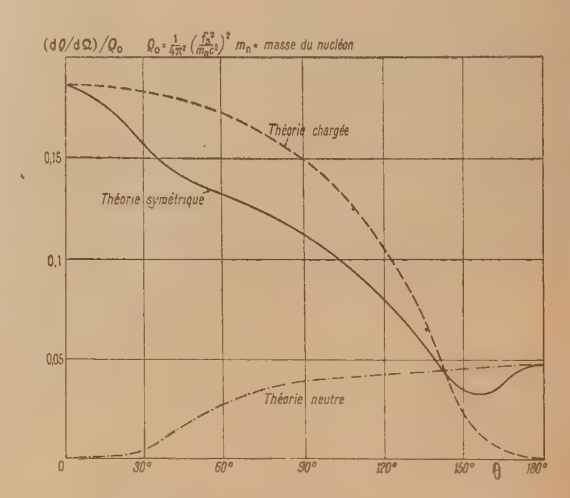


Fig. 1. — Collisions neutron-proton. Couplage pseudoscalaire. Système du centre de gravité-énergie cinétique du neutron incident = 90 MeV.

Nous avons admis que la masse du méson π était égale à 286 m_e. L'allure des courbes est sensible à la masse du méson utilisé, mais la latitude qu'offre ce paramètre, le seul qui joue dans les distributions angulaires données par (39) et (42) pour une énergie bien déterminée, ne permet pas de réaliser un accord

[5] Après la transformation unitaire indiquée en note au bas de la page 38, on aurait, en effet, pour le quadrivecteur énergie impulsion des champs interagissants

$$\mathfrak{P}_\mu = \frac{1}{c}\int_\sigma \mathrm{d}\sigma_\lambda\, T_{\lambda\mu}(x) = \mathfrak{P}_\mu^{(0)} - \frac{1}{c}\int_\sigma \mathcal{H}_{20}(x)\,\mathrm{d}\sigma_\mu.$$

Le second terme de $\mathfrak{P}_4$ est l'énergie d'interaction.

satisfaisant de ces courbes avec l'expérience. Toutefois, la comparaison entre eux des résultats obtenus ci-dessus présente un certain intérêt du point de vue théorique. On remarque que les sections efficaces différentielles dépendent fortement du caractère de charge des théories mésiques utilisées : chargée,

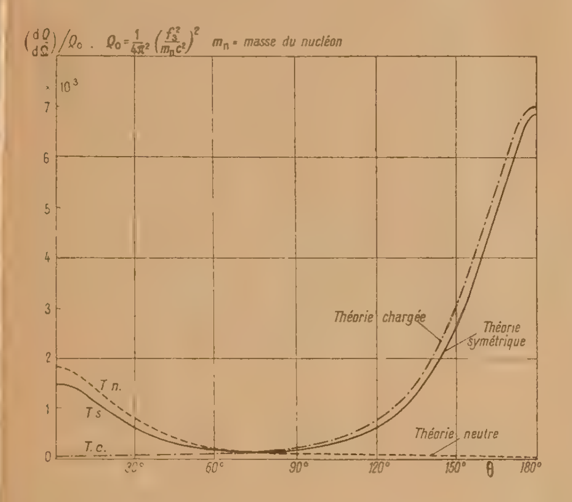


Fig. 2. — Collisions neutron-proton. Couplage scalaire. Système du centre de gravité-énergie cinétique du neutron incident = 90 MeV.

neutre ou symétrique. Il faut souligner que les distributions angulaires sont très différentes dans les deux cas possibles de spin zéro : scalaire et pseudo-scalaire. La différence réside essentiellement dans le renversement de la direction privilégiée de diffusion (en avant ou en arrière) lorsqu'on passe d'un type à l'autre.

Pour conclure, nous résumerons les résultats obtenus. Quand on considère les champs pseudo-scalaires et scalaires, les termes de contact $(\mathbf{P}_\mu \gamma_\mu)^2$ et $(\mathbf{M}_\mu \gamma_\mu)^2$ peuvent être complètement éliminés de l'hamiltonien du second ordre et ceci quels que soient les processus de cet ordre qu'on envisage. Dans le cas du méson pseudo-scalaire, le terme d'interaction pseudo-vectoriel se ramène pour les processus faisant intervenir des opérateurs à deux nucléons à un terme de couplage pseudo-scalaire, les deux constantes distinctes f_1 et f_2 sont alors remplacées par une constante unique $f_3 = f_1 + 2 f_2 \frac{\varkappa_N}{\varkappa}$. Ceci reste vrai lorsqu'on ne néglige plus la différence des masses du neutron et du proton, en raison du fait que $(\varkappa_n - \varkappa_p) \ll \varkappa_n + \varkappa_p$, ce qui est suffisant dans ce cas (25 *a*). Pour le méson scalaire, on a une propriété analogue, mais moins générale (41 *a*), c'est-à-dire que si l'on suppose $\varkappa_n = \varkappa_p$ on a alors une constante unique $g_3 = g_1$; mais si l'on fait $\varkappa_n \neq \varkappa_p$ on ne peut se ramener à une constante unique que lorsque $g_1 \ll g_2$ $\left(\text{alors } g_3 \approx g_2 \frac{\varkappa_n - \varkappa_p}{\varkappa}\right)$ et $g_1 \gtrsim g_2$ (alors $g_3 = g_1$). Dans l'éventualité $g_1 \approx g_2 \frac{\varkappa_n - \varkappa_p}{\varkappa}$ le couplage vectoriel se transforme bien encore en couplage scalaire, mais les constantes g_1 et g_2 interviennent en général indépendamment. Le résultat (44) montre bien que l'élimination des termes pseudo-vectoriels n'est valable que pour des processus réels du deuxième ordre et que pour des processus virtuels de cet ordre les termes en question donnent une contribution en dehors de la renormalisation de la constante f_1. Il ne suffira donc pas de considérer dans l'hamiltonien du premier ordre (17) un couplage pseudo-scalaire avec la constante f_3, sans terme de contact ni couplage pseudo-vectoriel [10] quand on voudra décrire des effets d'ordre supérieur à deux, le terme virtuel de (44) pouvant alors donner une contribution.

Pour terminer nous voulons souligner *la grande simplicité dans les applications* du formalisme utilisé par rapport aux calculs basés sur la théorie habituelle des perturbations. Les résultats qu'on déduit de cette dernière se retrouvent ici plus rapidement et plus élégamment. Cela est lié à la possibilité qu'on a de conduire une grande partie des calculs dans l'espace des coordonnées, le passage à l'espace des moments ne s'effectuant qu'en tout dernier lieu. C'est en ce fait que réside la puissance de cette méthode.

Nous tenons à exprimer ici nos vifs remerciements à M. A. Proca pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et les encouragements qu'il n'a cessé de nous prodiguer.

Ces recherches ont été effectuées grâce aux allocations du Centre National de la Recherche Scientifique.

Manuscrit reçu le 30 juillet 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Sin-itiro Tomonaga. — *Prog. Theoret. Phys.*, 1946, **1**, 27. — Koba, Tati et Tomonaga. — *Prog. Theoret. Phys.*, 1947, **2**, 101, 198. — Kanesawa S. et Tomonaga S. — *Prog. Theoret. Phys.*, 1948, **3**, 1, 101. — Tomonaga S. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 224.

[2] Schwinger Julian. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1439; *id.* 1949, **75**, 651.

[3] Dyson F. J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 486, 1736.

[4] Miyamoto Y. — *Prog. Theoret. Phys.*, 1948, **3**, 124. — Case K. M. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1440. — Yevick G. *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1450.

[5] Kanesawa S. et Tomonaga S. — *Prog. Theor. Phys.*, 1948, **3**, 1, 101.

[6] Matthews P. T. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1270.

[7] Rayski J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1961.

[8] Pauli W. Villars F. — *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 434.

[9] *Voir* par exemple Wheller et Tiomno. — *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 145 et 153.

[10] Nelson E. C. — *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 830. — Dyson F. J. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 929. — Van Hove L. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1519. — Lecouteur K. J. et Rosenfeld L. — *Phil. Mag.*, 1949, **40**, 151.

[11] Kemmer N. — *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1938, **34**, 34.

[12] Rohrlich F. et Eisenstein J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 705. — Ashkin J. et Ta You Wu. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 973.

[13] Möller C. — *Det. Kgl. Danske. Vidensk. Selskab.*, 1945, **23**, n° 1, 1946, **22**, n° 19.

[14] Möller C. et Rosenfeld L. — *Det. Kgl. Danske Vidensk. Selskab.*, 1940, **17**, n° 8.

[15] Weiss P. — *Proc. Roy. Soc.*, A, 1936, **156**, 192.

[16] Jean M. et Prentki J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **229**, n° **3**, 171.

[17] Hadley, Kelly, Leith, Segré, Wiegand et York. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 351.

LA BIRÉFRINGENCE ACOUSTIQUE DES LIQUIDES PURS

Par ANTON PETERLIN.
Université de Ljubljana, Yougoslavie.

Sommaire. — La théorie moléculaire de la biréfringence acoustique des liquides purs remplace les molécules par des ellipsoïdes rigides, de révolution, qui tendent à s'orienter sous l'influence du champ ultrasonore de manière que leur grand axe coïncide avec l'axe de la dilatation maxima. L'orientation s'établit suivant un équilibre entre ce mouvement régulier des molécules et le mouvement brownien. La biréfringence qui en résulte est proportionnelle à la racine carrée de l'intensité du champ sonore et à la fréquence jusqu'à ce que les phénomènes de relaxation deviennent sensibles. La fréquence de relaxation $\omega = 2\pi\nu$ est égale à $6D$ où D signifie la constante de diffusion rotationnelle. Pour les fréquences extrêmes la biréfringence atteint une valeur limite. Cette théorie explique, d'une manière satisfaisante, les expériences.

1. Lucas [1] a trouvé que des liquides très visqueux, comme par exemple l'huile de ricin et l'huile de lin, deviennent biréfringents sous l'influence des ondes ultrasonores très intenses. L'effet est proportionnel à la racine carrée de l'intensité acoustique et à la fréquence. Dans la partie de l'onde où le fluide est comprimé, le signe de la biréfringence est opposé à celui de la partie dilatée. L'effet n'est pas décelable avec la glycérine ou l'acétate d'éthyle. Ces expériences ont été confirmées par Zvetkov et ses collaborateurs [2, 3, 4]. Ils ont mesuré l'effet dans les huiles de ricin, de cèdre, de lin, de sésame, d'hélianthe, celles utilisées dans les transformateurs, les pompes à vide et ils ont trouvé aussi les phénomènes de relaxation pour les fréquences élevées.

2. La théorie de l'effet a été développée par Lucas [1, 5], Peterlin [6] et Frenckel [7]. Lucas s'est inspiré de la théorie phénoménologique de Raman et Krishnan [8], de la biréfringence d'écoulement. La biréfringence est la conséquence de la déformation de l'élément d'espace. Les tensions élastiques tendent à orienter les molécules. Si nous imaginons les molécules en ellipsoïdes, elles tendent à être orientées de façon que leur grand axe coïncide avec l'axe de la dilatation maxima. Dans le cas de la biréfringence dynamique, cette théorie exige que l'angle d'extinction soit égal à 45°, ce qui ne vaut qu'en première approximation. Pour expliquer l'orientation des molécules plus grandes et des particules colloïdales aux gradients élevés, cette théorie doit être remplacée par une théorie cinématique qui rend compte du mouvement des molécules dans l'écoulement. Pour la biréfringence acoustique, la théorie de Lucas donne exactement la variation de l'effet avec l'intensité du champ sonore et les relations avec la biréfringence d'écoulement

$$\Delta n_{\max} = M n \eta \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2J}{\rho c}}, \qquad (1)$$

où M représente la constante Maxwell, $\omega = 2\pi\nu$ (ν, la fréquence acoustique), J, l'intensité du flux d'énergie par centimètre carré, c, la vitesse du son et ρ la densité du liquide. Mais elle ne rend pas compte des effets de relaxation qui se manifestent aux fréquences très élevées [4].

3. Une théorie moléculaire a été proposée par Peterlin [6]. Le champ ultrasonore tendant à orienter les molécules qui, d'autre part, sont agitées par le mouvement brownien. En équilibre dynamique une orientation périodique en résulte qui est d'autant plus en arrière de l'onde acoustique que la fréquence est plus élevée.

Remplaçons les molécules par des ellipsoïdes rigides de révolution. Désignons la longueur de l'axe de symétrie par $2a_1$, celle de l'axe perpendiculaire par $2a_2$, leur rapport $p = \frac{a_1}{a_2}$. Le champ de vitesse de l'onde ultrasonore se propageant dans la direction x est donné par

$$v_x = A \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Puisque la longueur d'onde λ_{ac} est beaucoup plus grande que les dimensions des molécules, on peut remplacer le champ de vitesse autour de l'ellip-

soïde (o) par

$$v_x = v_x(0) + (x - x_0)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 + \ldots$$
$$= A\cos\omega\left(t - \frac{x_0}{c}\right) + (x - x_0)\frac{A\omega}{c}\sin\omega\left(t - \frac{x_0}{c}\right) + \ldots$$
$$= v_x(0) + q(x - x_0) + \ldots$$

et négliger tous les termes non linéaires.

On obtient le mouvement de l'ellipsoïde dans ce champ linéaire en analogie complète avec le calcul de Jeffery [9] qui a considéré le mouvement dans l'écoulement laminaire de Couette ($v_x = qy$) [10]. Les forces d'inertie et les termes quadratiques dans les équations hydrodynamiques sont toujours négligeables en comparaison avec les forces de surface, ce qui exige que le nombre de Reynolds

$$R = \frac{q\rho a^2}{\eta},$$

soit sensiblement inférieur à l'unité. Cette condition est toujours remplie, même pour les molécules géantes. On a, par exemple, dans un champ très intense de $J = 10$ W : cm² et de fréquence $\nu = 10^6$ s⁻¹ :

$$q_{\max} = \frac{A\omega}{c} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2J}{\rho c}} \sim 1,5.10^3 \text{ s}^{-1},$$

ce qui donne $R < 0{,}01$ même pour $a = 2{,}6\ \mu$ et $\eta = 0{,}01$ P.

Dans ce cas de l'influence prépondérante de la viscosité, l'ellipsoïde suit la translation du liquide v_x (o) et tourne avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, pour laquelle on obtient

$$\dot{\theta} = -qb\sin\theta\cos\theta,$$

avec

$$b = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1},$$

où θ signifie l'angle entre l'axe de symétrie de l'ellipsoïde et l'axe Ox.

4. L'orientation des molécules est l'effet de l'équilibre entre le mouvement régulier $\dot{\theta}$ et le mouvement irrégulier brownien qui tend à effacer toute orientation dans le liquide. La fonction de répartition Φ qui donne, en chaque lieu, le nombre des molécules par centimètre cube et par l'angle solide $d\Omega$, orientées sous l'angle θ, doit satisfaire à l'équation de diffusion

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

$$\vec{j} = \Phi\vec{\dot{\theta}} - D\operatorname{grad}\Phi,$$

$$-qb\left[\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + (3\cos^2\theta - 1)\Phi\right] - D\,\Delta\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

où D représente la constante de diffusion rotationnelle [11].

Puisque qb est sensiblement inférieur à D, la solution

$$\Phi = \frac{N}{4\pi}\left\{1 + \frac{3Ab}{c}\frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\right.$$
$$\left.\times\sin\left[\omega\left(t - \frac{x_0}{c}\right) - \varphi\right] + \ldots\right\}$$

avec

N, nombre de molécules par centimètre cube;

$\tau = \frac{1}{6D}$, temps de relaxation;

$\operatorname{tg}\varphi = \omega\tau$;

suffit complètement pour décrire les expériences. On voit que l'orientation croît avec la fréquence de l'onde ultrasonore et lui est proportionnelle tant que le terme $\omega\tau$ ne se rend sensible dans le dénominateur. L'effet de relaxation fait que l'orientation tend vers la valeur limite

$$-\frac{3A}{c}b\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

pour les fréquences extrêmes où nos suppositions sont encore valables. Pour $\omega\tau = 1$ $\left(\nu = \frac{3D}{\pi}\right)$, l'orientation est égale à 71 pour 100 de la valeur limite et l'angle de relaxation prend la valeur $\varphi = 45°$.

5. Supposons que les axes de l'ellipsoïde coïncident avec les axes principaux de la polarisabilité optique de la molécule, on déduit de loi de la réfraction

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3}N\alpha,$$

la biréfringence du liquide soumis à des ultrasons

$$\Delta n = n_x - n_y = n_e - n_0 = \frac{(n^2 + 2)^2}{6n}\frac{4\pi}{3}N(\bar{\alpha}_x - \bar{\alpha}_y),$$

ce qui donne en nous bornant au premier membre

$$\frac{\Delta n}{n} = \left(\frac{n^2 + 2}{3n}\right)^2\frac{4\pi}{5}N\frac{A}{c}b(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$\times\frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - \varphi\right]$$
$$= \frac{A}{c}K_{ac}\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - \varphi\right].$$

La biréfringence acoustique oscille avec la fréquence de l'onde ultrasonore et avec l'amplitude

$$\frac{\Delta n_{\max}}{n} = \frac{A}{c}K_{ac} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2J}{\rho c}}K_{ac},$$

mais elle reste en arrière de l'onde de l'angle de relaxation φ. La valeur maxima de la biréfringence est proportionnelle à l'amplitude A de vitesse du champ acoustique, c'est-à-dire à la racine carrée de l'intensité J de l'onde progressive. En analogie avec les autres biréfringences accidentelles, il vaut la peine d'introduire la constante de biréfringence

acoustique (constante de Lucas).

$$K_{ac} = \frac{\Delta n_{\max} c}{nA} = \frac{c\,\Delta n_{\max}}{n}\sqrt{\frac{\rho c}{2J}}$$
$$= \left(\frac{n^2+2}{3n}\right)^2 \frac{4\pi}{5} Nb(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}.$$

La constante molaire

$$K_{ac\,\mathrm{mol}} = \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^2 \frac{M}{\rho} K_{ac} = \frac{4\pi}{45} N_A b(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

en résulte si l'on remplace N par le nombre d'Avogadro et si l'on multiplie K_{ac} par un facteur qui fait disparaître dans la constante molaire tous les termes non moléculaires. Dans la figure 1, nous avons

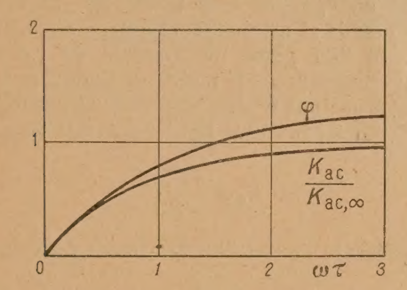


Fig. 1. — La constante de biréfringence acoustique K_{ac} et l'angle φ en fonction de la fréquence réduite $\frac{\nu}{\nu_{rel}} = \omega\tau$.

tracé K_{ac} et l'angle φ en fonction de la fréquence.

La constante K_{ac} est intimement liée à la constante Maxwell [12, 13].

$$M = \frac{\Delta n}{q n \eta} = \left(\frac{n^2+2}{3n}\right)^2 \frac{4\pi}{5} N \frac{b(\alpha_1-\alpha_2)}{6\eta D}.$$

On a

$$K_{ac} = \eta M \frac{\omega}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}, \qquad (2)$$

ce qui permet de calculer K_{ac} dans tous les domaines où les phénomènes de relaxation ne sont pas encore sensibles, si l'on connaît ηM. L'expression (2) ne diffère de celle donnée par Lucas [équ. (1)] que par le terme correctif dû à la relaxation.

On voit que la biréfringence acoustique des liquides purs fournit plus de détails de la structure moléculaire que la biréfringence d'écoulement, car l'angle d'extinction, qui donne la constante de diffusion D est toujours égal à 45° chez les liquides à molécules normales, ce qui ne permet pas de calculer D. Les effets de relaxation, au contraire, donnent D d'une manière très simple puisque la biréfringence acoustique est d'autant plus aisée à observer que la fréquence est plus élevée.

6. Cette théorie cinématique est d'accord avec les expériences quant à l'intensité de l'effet et à sa dépendance de la fréquence. Pour la plupart des liquides purs, la biréfringence acoustique est trop petite pour pouvoir être observée. Mais déjà la nitrobenzène [14], par exemple, avec

$$Mn\eta = 9{,}3.10^{-12}; \qquad c = 1500\ \mathrm{m:s^{-1}}; \qquad \rho = 1{,}203\ \mathrm{g:cm^{-3}}$$

donne, avec $\nu = 10^6\ \mathrm{s^{-1}}$ et $J = 10\ \mathrm{W:cm^2}$, une biréfringence maxima

$$\Delta n_{\max} = 1{,}3.10^{-8}.$$

Si le rayon lumineux fait un chemin $l = 4$ cm dans le liquide, on a, pour $\lambda = 5000$ Å, une différence de phase

$$\delta_{\max} = 1{,}04.10^{-2},$$

ce qui n'est pas difficile à mesurer. Dans les liquides plus visqueux et biréfringents, l'effet est encore plus apparent.

Zvetkov et Eskin [4] ont pu vérifier les prédictions de la théorie en mesurant la biréfringence acoustique dans l'huile de lin, l'huile d'hélianthe, l'acide oléique, l'huile de ricin, l'huile de pompes à vide et le cinnamate d'éthyle, dont la biréfringence dynamique avait été mesurée par Frisman. L'effet observé est d'accord avec les valeurs calculées d'après l'équation (2) dans les limites des erreurs d'observation. En outre, la biréfringence est proportionnelle à la racine carrée de l'intensité du champ ultrasonore, ce qui était déjà établi par Lucas. Puis ils ont fait varier la fréquence de 9.10^5 jusqu'à $11{,}1.10^6\ \mathrm{s^{-1}}$. De l'effet de relaxation ils ont trouvé $\tau = 1{,}5.10^{-7}$ s pour l'huile de ricin et $4{,}5.10^{-8}$ s pour l'huile de pompes à vides, cependant que l'effet dans l'huile d'hélianthe polymérisée indiquait qu'il y avait plusieurs τ différents, ce qui est facile à comprendre puisque la polymérisation donne des molécules de différentes grandeurs.

7. Si l'on fait croître les dimensions de l'ellipsoïde, on peut décrire aussi les propriétés des solutions colloïdales, pourvu que l'on remplace la polarisabilité optique de la molécule par la polarisabilité optique de l'ellipsoïde. Malgré tout, il faut se rendre compte qu'à mesure que les particules suspendues deviennent plus grandes, les équations hydrodynamiques simplifiées de Stokes-Navier cessent de valoir. Il faut introduire les termes quadratiques qui prévalent absolument pour des particules macroscopiques (disques de Rayleigh). Leur orientation est alors proportionnelle au carré de l'amplitude de la vitesse, c'est-à-dire à l'intensité du champ sonore. Les bâtonnets et les disques s'orientent de telle manière que leurs grands axes deviennent perpendiculaires à la direction de la propagation de l'onde [15].

8. D'ordinaire, on observe la biréfringence acoustique en mesurant la lumière qui passe à travers

deux nicols croisés et le fluide qui se trouve entre eux. L'intensité de cette lumière est proportionnelle à chaque moment à

$$E \sim (2\pi\delta)^2 = \left(\frac{2\pi l\,\Delta n}{\lambda}\right)^2,$$

puisque δ est toujours très petit. Si l'on ne fait pas d'observations stroboscopiques [3], ce n'est que la valeur moyenne dans le temps que l'on mesure en chaque point du champ sonore

$$E_0 \sim \overline{(2\pi\delta)^2} = \frac{1}{2}(2\pi\delta_{max})^2.$$

Ceci est correct si l'on observe la luminosité du liquide soumis à des ultrasons.

Si, au contraire, on fait passer un faisceau de lumière parallèle et, par conséquent, cohérente et si l'on observe l'intensité de l'image de diffraction de la lumière qui sort du nicol analyseur, on voit que celle-ci diminue quand on élargit le faisceau dans la direction x. C'est la conséquence du fait que le signe de la biréfringence dans une demi-onde est opposé à celui dans les demi-ondes situées près d'elle. Par interférence, leur effet peut même s'annuler. L'intensité décroît de la même manière que l'intensité de la lumière diffractée par une fente qui a la même section que notre faisceau de lumière. Pour une section rectangulaire d'épaisseur a dans la direction x, on a

$$E_a = E_0\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \quad \text{avec} \quad \xi = \pi\frac{a}{\lambda_{ac}}$$

et pour une section circulaire de rayon r,

$$E_r = E_0 I_0^2\left(2\pi\frac{r}{\lambda_{ac}}\right),$$

où I_0 représente la fonction de Bessel du degré zéro.

Si l'on prend un champ d'ondes stationnaires

$$v_x = A\cos\frac{2\pi x}{\lambda_{ac}}\cos\omega t,$$

l'effet ne change pas essentiellement. Il disparaît dans les nœuds et atteint sa valeur maxima dans les ventres. Si l'on place un système de fentes qui couvrent chaque seconde moitié de l'onde, la lumière qui passe a partout le même signe de la biréfringence et l'effet mentionné plus haut ne paraît plus. On a alors

$$E_a = a\frac{E_0}{2},$$

où a représente l'extension des fentes dans la direction x.

Manuscrit reçu le 11 juillet 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Lucas R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1938, **206**, 827.

[2] Zvetkov V., Mindlina A. et Makarov C. — *Acta Physicochimica U. R. S. S.*, 1946, **21**, 135.

[3] Zvetkov V. et Marinin V. — *C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1948, **63**, 653.

[4] Zvetkov V. et Eskin V. — *J. Phys. exp. théor.* (russe), 1948, **18**, 614.

[5] Lucas R. — *Journ. Phys. et Rad.*, 1939, (7), **10**, 153.

[6] Peterlin A. — *Zbornik prir. dr. Ljubljana*, 1941, **2**, 24; *voir* aussi Peterlin A. et Stuart H. A, *Hd. u. Jb. Chem. Physik.*, Leipzig, 1943, **8**, IB, 56-57.

[7] Frenkel J. — *Théorie cinétique des liquides* (russe), Léningrad, 1945, 380-381.

[8] Raman C. V. et Krishnan K. S. — *Phil. Mag.*, 1928, (7), **5**, 769.

[9] Jeffery C. B. — *Proc. Roy. Soc.*, London, 1923, A **102**, 161.

[10] Le champ $v_x = qy$ donne l'écoulement d'un fluide incompressible, tandis que nous avons, dans le champ ultrasonore, des compressions et des dilatations locales. Malgré cela, on peut chercher les solutions hydrodynamiques comme si le fluide était incompressible, parce que les variations de densité sont tout à fait négligeables dans les environs immédiats de la molécule à cause de la grandeur du rapport $\frac{\lambda_{ac}}{4\pi a}$ où a signifie la valeur a_1 ou a_2 la plus grande.

[11] Cans R. — *Annalen d. Physik*, 1928, **86**, 628.

[12] Sadron Ch. — *Journ. Phys. et Rad.*, 1937, (7), **8**, 481.

[13] Peterlin A. et Stuart H. A. — *Z. Phusik*, 1939, **112**, 1; 1939, **113**, 663.

[14] Sadron Ch. — *Journ. Phys. et Rad.*, 1936, (7), **7**, 263.

[15] Oka S. — *Kolloid Z.*, 1939, **87**, 37; *Z. Physik*, 1940, **116**, 632.

Le Gérant : Maurice Blondin. 134607 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1950.